CHAPITRE 1

Suites numériques

Introduction

1. Programme

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Suites Raisonnement par récurrence.	• Savoir mener un raisonnement par récurrence.	Ce type de raisonnement intervient tout au long de l'année et pas seulement dans le cadre de l'étude des suites.
Limite finie ou infinie d'une suite.	♦ Dans le cas d'une limite infinie, étant donnés une suite croissante (u_n) et un nombre réel A, déterminer à l'aide d'un algorithme un rang à partir duquel u_n est supérieur à A.	Pour exprimer que u_n tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$, on dit que : « tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang ». Pour exprimer que u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, on dit que : « tout intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang ». Comme en classe de Première, il est important de varier les approches et les outils sur lesquels le raisonnement s'appuie. On présente des exemples de suites qui n'ont pas de limite.
Limites et comparaison.	■ Démontrer que si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que : – u_n est inférieur ou égal à v_n à partir d'un certain rang ; – u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$; alors v_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.	■ On démontre que si une suite est croissante et admet pour limite ℓ, alors tous les termes de la suite sont inférieurs ou égaux à ℓ. Le théorème dit « des gendarmes » est admis.
Opérations sur les limites.	• Étudier la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de deux suites.	
Comportement à l'infini de la suite (q^n), q étant un nombre réel.	■ Démontrer que la suite (q^n), avec $q > 1$, a pour limite $+\infty$. • Déterminer la limite éventuelle d'une suite géométrique.	On démontre par récurrence que pour a réel strictement positif et tout entier naturel n : $(1+a)^n \geqslant 1 + na$. On peut étudier des situations où intervient la limite de la somme des premiers termes d'une suite géométrique.
Suite majorée, minorée, bornée.	• Utiliser le théorème de convergence des suites croissantes majorées.	Ce théorème est admis. ■ Il est intéressant de démontrer qu'une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$. Des exemples de suites récurrentes, en particulier arithmético-géométriques, sont traités en exercice. ♦ Des activités algorithmiques sont menées dans ce cadre. AP *Approximations de réels (π, e, nombre d'or, etc.).*

Plusieurs démonstrations, ayant valeur de modèle, sont repérées par le symbole ■. Certaines sont exigibles et correspondent à des capacités attendues. De même, les activités de type algorithmique sont signalées par le symbole ♦.

2. Intentions des auteurs

Dans ce premier chapitre sur les suites numériques :
• on fait le point sur les connaissances de Première, en particulier : sens de variations d'une suite, suites arithmétiques et géométriques ;
• on met en place un nouveau type de raisonnement : le raisonnement par récurrence ;
• on fait une étude approfondie de la notion de limite d'une suite : définitions précises, opérations sur les limites, théorèmes de comparaison, cas des suites monotones.
Toutes ces notions sont abordées à travers la résolution de problèmes le plus souvent liés à la vie courante ou aux autres disciplines par une modélisation de phénomènes discrets. De nombreux QCM, « Vrai ou faux ? » permettent de faire le point rapidement sur la compréhension du cours et aussi la mise en place de raisonnements par contre-exemple.

Un objectif important est de préparer la notion de limite d'une fonction numérique.
Une attention particulière est portée sur le raisonnement : la récurrence bien sûr, mais aussi le raisonnement par condition suffisante.
Les algorithmes permettent également d'appréhender les phénomènes discrets décrits par les suites, sans être forcément formalisés, c'est la démarche algorithmique qui importe.
Tout au long de ce chapitre se précise l'utilisation de logiciels : calculatrices graphiques, traceurs de courbes, tableurs, logiciels de géométrie dynamique ou de programmation. L'utilisation d'un logiciel de calcul formel doit permettre, en fonction des élèves, de surpasser les difficultés du calcul algébrique.

Partir d'un bon pied

Objectif

Réactiver chez l'élève :
– les différentes façons de définir une suite ;
– les variations d'une suite numérique ;
– la lecture d'un algorithme.

A	**1** **b.** et **c.**	**2** **b.** et **c.**	**3** **a.**	**4** **a.** et **c.**
B	**1** Faux.	**2** Vrai.	**3** Faux.	**4** Vrai.
C	**1** Vrai.	**2** Faux.	**3** Faux.	
D	**1** Vrai.	**2** Vrai.	**3** Vrai.	**4** Faux.
	5 Vrai.			

Découvrir

Activité 1 Vers le raisonnement par récurrence

Objectif : *Aborder le raisonnement par récurrence en distinguant les différentes étapes.*

1 ▸ P_1 : « $1 + a \geqslant 1 + a$ ». Propriété vraie.
▸ Q_1 : « $10^1 - 1$ est divisible par 9 ». Propriété vraie.
▸ R_1 : « $1 \times 2 = \dfrac{1 \times 2 \times 3}{3}$ ». Propriété vraie.

2 **a.** ▸ P_{n+1} : « $(1+a)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)a$. »
▸ Q_{n+1} : « $10^{n+1} - 1$ est divisible par 9 ».
▸ R_{n+1} : « $1 \times 2 + 2 \times 3 + \ldots + (n+1) \times (n+2)$
$$= \frac{(n+1) \times (n+2) \times (n+3)}{3} \text{ ».}$$

b. ▸ Si P_n est vraie, alors $(1+a)^n \geqslant 1 + na$. Donc en multipliant par $1 + a$, on obtient :
$$(1+a)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)a + na^2.$$
Comme $a^2 \geqslant 0$, on a :
$$(1+a)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)a.$$
Donc P_{n+1} est vraie.
▸ La propriété Q_n se traduit par $10^n = 9k + 1$, avec k un entier.
$$\text{Donc } 10^{n+1} - 1 = 10(9k+1) - 1 = 90k + 9$$
$$= 9(10k+1).$$
Donc Q_{n+1} est vraie.
▸ On a :
$$A = [1 \times 2 + 2 \times 3 + \ldots + n(n+1)] + (n+1)(n+2).$$
Donc en utilisant R_n,
$$A = \frac{n \times (n+1) \times (n+2)}{3} + (n+1)(n+2)$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)}{3}(n+3).$$
Donc R_{n+1} est vraie.

Activité 2 La balle au rebond

Objectif : *Modéliser une situation simple et utiliser la calculatrice ou un tableur.*

1 On a $u_1 = \dfrac{3}{4} \times 1 = 0{,}75$ et $u_2 = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{3}{4} = 0{,}5625$.
On modélise cette situation par la suite u de terme général $u_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.
$u_{10} \approx 0{,}056$;
$u_{1000} = 1{,}15 \times 10^{-125}$.

2 En utilisant un tableau (voir ci-contre), à partir du 97ᵉ rebond, la hauteur de la balle est inférieure à 10^{-12} m.

n	un
0	1
1	0,75
2	0,5625
91	4,2714E-12
92	3,2036E-12
93	2,4027E-12
94	1,802E-12
95	1,3515E-12
96	1,0136E-12
97	7,6023E-13
98	5,7017E-13

Activité 3 Un calcul d'aire

Objectif : *Résoudre un problème classique qui a joué un rôle historique d'Archimède à Riemann en :*
– faisant intervenir un raisonnement par récurrence ;
– abordant une limite « naturelle ».

1 a. b. Pour tout entier $n \geqslant 1$, les rectangles ont pour largeur $\frac{1}{n}$ et pour longueur $\left(\frac{k}{n}\right)^2$, où k est l'entier désignant le numéro du rectangle (de 0 à $n-1$).
c. On conjecture que la somme des aires de ces rectangles tend vers $\frac{1}{3}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2 D'après **1 a.**, $S_n = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right]$
$$= \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n-1} i^2.$$

3 Démontrons par récurrence la propriété P_k :
« $\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ » pour tout entier $k \geqslant 1$.

◗ **Initialisation :** $k = 1$.
$\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1$ et $\frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1$. Donc P_1 est vraie.

◗ **Hérédité :** soit un entier $k \geqslant 1$ tel que P_k est vraie.
Montrons que $\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.
On a $\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2$.
Donc en utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :
$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$
$$= \frac{(k+1)}{6}\left[\frac{k(2k+1)}{6} + (k+1)\right]$$
$$= (k+1)\left[2k^2 + 7k + 6\right].$$
Donc $\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.
Donc P_{k+1} est vraie.

◗ **Conclusion :** par récurrence, pour tout entier $k \geqslant 1$, $\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

4 On a :
$$S_n = \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6n^3} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{2n}\right).$$
Comme $\frac{1}{n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, on a $\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{3}$.

Activité 4 Convergence vers 0

Objectifs
– Lire et modifier un algorithme.
– Approcher la définition mathématique de la convergence d'une suite vers 0.

1 a. L'algorithme donne la valeur N de n à partir de laquelle $u_n < 10^{-3}$.
b. Modification : « TantQue $u \geqslant 10^{-6}$ ».
c. Soit $\varepsilon > 0$. On a :
$$0 < u_n < \varepsilon \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow n^2 > \frac{1}{\varepsilon}.$$
On en déduit que si $n \geqslant 1 + E\left(\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}\right)$, alors $0 < u_n < \varepsilon$.

2 Soit $\varepsilon > 0$. On a $0 < v_n < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{n} > \frac{1}{\varepsilon}$.
On en déduit que si $n \geqslant 1 + E\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$, alors $0 < v_n < \varepsilon$.
Donc $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$.

Activité 5 Variations et équations

Objectif
Mettre en place un large panel de techniques de base pour étudier une suite récurrente : représentation graphique, conjectures, sens de variations, utilisation d'une suite auxiliaire.

1 La fonction f est affine de coefficient 0,5, donc elle est croissante sur $\mathbb{R}$. On a le tableau ci-dessous.

x	0	2
$f(x)$	1 ↗	2

Pour tout $x \in [0\,;2]$ on a $f(x) \in [1\,;2]$, donc :
$$f(x) \in [0\,;2].$$

2 a. $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1{,}5$, $u_3 = 1{,}75$.
b. La suite u semble être croissante.
c. Pour tout entier naturel n, démontrons la propriété P_n : « $u_n \leqslant u_{n+1}$ ».
◗ **Initialisation :** $u_0 \leqslant u_1$ (voir **2 a.**), donc P_0 est vraie.
◗ **Hérédité :** soit un entier naturel n tel que P_n est vraie.
Démontrons qu'alors P_{n+1} : « $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$ » est vraie.
D'après l'hypothèse de récurrence $u_n \leqslant u_{n+1}$. Comme la fonction f est croissante, $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$, donc $u_n \leqslant u_{n+1}$. Donc P_{n+1} est vraie.
◗ **Conclusion :** par récurrence, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$. Donc la suite u est croissante.

3 a. En B3, il faut écrire **=0,5*B2+1**
b. La suite u semble converger vers 2.

4 a. En C2, écrire =B2-2 (voir ci-contre). La suite v semble être une suite géométrique de raison 0,5 et de premier terme -2.
b. Pour tout entier naturel n,
$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = 0{,}5 \times u_n + 1 - 2$$
$$= 0{,}5 \times (u_n - 2).$$
Donc, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 0{,}5 v_n$.
Donc la suite v est géométrique de raison 0,5 et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = -2$.

n	un	vn
0	0	-2
1	1	-1
2	1,5	-0,5
3	1,75	-0,25
4	1,875	-0,125
5	1,9375	-0,0625
6	1,9688	-0,0313
7	1,9844	-0,0156
8	1,9922	-0,0078
9	1,9961	-0,0039
10	1,998	-0,002
11	1,999	-0,001
12	1,9995	-0,0005
13	1,9998	-0,0002
14	1,9999	-0,0001
15	1,9999	-6E-05
16	2	-3E-05

c. Pour tout entier naturel n, on a $v_n = -2 \times (0{,}5)^n$.
Donc $u_n = 2 + v_n = 2 - 2 \times (0{,}5)^n$.
d. La suite u est donc convergente vers 2, car $\lim_{n \to +\infty} 2 \times (0{,}5)^n = 0$.

Exercices d'application

Savoir faire Mener un raisonnement par récurrence

1 Pour tout entier naturel n non nul, on note $P(n)$ la propriété :

$$« \ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \ ».$$

◗ **Initialisation :** pour $n = 1$,

on a $1^2 = 1$ et $\dfrac{1\times(1+1)\times(2\times1+1)}{6} = 1$.

Donc $P(1)$ est vraie.

◗ **Hérédité :** on suppose que pour **un** entier $n \geqslant 1$, $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire que :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Alors : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n+1)^2$

$= [1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2] + (n+1)^2$

$= \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

d'après l'hypothèse de récurrence.

Donc $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n+1)^2$

$$= (n+1)\times\left(\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right)$$

$$= (n+1)\times\frac{2n^2+7n+6}{6}.$$

Or, $((n+1)+1)(2(n+1)+1) = (n+2)(2n+3)$
$= 2n^2 + 7n + 6$.

Donc :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

c'est-à-dire que la propriété $P(n+1)$ est vraie.

◗ **Conclusion :** par récurrence, pour tout entier $n \geqslant 1$, $P(n)$ est vraie.

Donc, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2 Démontrons, pour tout entier naturel n, la proposition $P(n)$: « $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7 ».

◗ **Initialisation :** $2^0 - 1 = 0$ qui est un multiple de 7.

◗ **Hérédité :** on suppose que pour **un** entier, $P(n)$ est vraie. Montrons alors $P(n+1)$: « $2^{3n+3} - 1$ est un multiple de 7 ».

D'après l'hypothèse de récurrence, $2^{3n} = 1 + 7k$, où k est un entier. En multipliant par 8, on obtient $2^{3n+3} = 8 + 56k$, donc $2^{3n+3} - 1 = 7(7 - 8k)$.

C'est-à-dire que la propriété $P(n+1)$ est vraie.

◗ **Conclusion :** par récurrence, pour tout entier naturel n, « $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7 ».

3 Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$ la propriété : « $u_n = (n+1)^2$ »

◗ **Initialisation :** pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ et $(0+1)^2 = 1$. Donc $P(0)$ est vraie.

◗ **Hérédité :** on suppose que pour **un** entier $n \geqslant 0$, $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_n = (n+1)^2$.

Alors $u_{n+1} = u_n + 2n + 3 = (n+1)^2 + 2n + 3$ d'après l'hypothèse de récurrence.

Donc $u_{n+1} = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$,
c'est-à-dire que la propriété $P(n+1)$ est vraie.

◗ **Conclusion :** par récurrence, pour tout entier $n \geqslant 0$, $P(n)$ est vraie.

Donc, pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = (n+1)^2$.

4 Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note $P(n)$ la propriété : « le nombre de cordes reliant n points du cercle est $\dfrac{n(n-1)}{2}$ ».

◗ **Initialisation :** pour $n = 2$ on a une seule corde possible et $\dfrac{2(2-1)}{2} = 1$. Donc $P(2)$ est vraie.

◗ **Hérédité :** on suppose que pour **un** entier, $P(n)$ est vraie. Montrons alors $P(n+1)$: « le nombre de cordes reliant $n+1$ points du cercle est $\dfrac{(n+1)n}{2}$ ».

Pour obtenir $n+1$ points du cercle, on ajoute un point aux n déjà existants. Donc on ajoute n cordes au nombre total de cordes. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a $\dfrac{n(n-1)}{2} + n$ cordes, soit $\dfrac{(n+1)n}{2}$, c'est-à-dire que la propriété $P(n+1)$ est vraie.

◗ **Conclusion :** par récurrence, pour tout entier $n \geqslant 2$, $P(n)$ est vraie. Donc pour tout entier $n \geqslant 2$, le nombre de cordes reliant n points du cercle est $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Savoir faire Déterminer la limite d'une suite à l'aide de la définition

5 On conjecture :

a. la suite u semble ne pas admettre de limite ;

b. la suite v semble converger vers 0,5 ;

c. la suite w semble diverger vers $+\infty$.

n	u(n)	v(n)
90	90	.47568
95	-95	.47692
100	100	.47805
105	-105	.47907
110	110	.48
115	-115	.48085
120	120	.48163

n=120

n	v(n)	w(n)
90	.47568	7920
95	.47692	8835
100	.47805	9800
105	.47907	10815
110	.48	11880
115	.48085	12995
120	.48163	14160

w(n)=14160

6 **1** ◗ On conjecture que la suite u converge vers 0.

◗ Soit $\varepsilon > 0$, on a $|u_n| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{5}{n+1} \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{5}{\varepsilon} - 1$.

On en déduit que si $n \geqslant 1 + E\left(\dfrac{5}{\varepsilon} - 1\right)$, alors $u_n < \varepsilon$.

La suite u converge vers 0.

2 **a.** À partir de $N = 500$, on a $|u_n| \leqslant 0{,}01$.

b. À partir de $N = 5\times10^{12}$, on a $|u_n| \leqslant 10^{-12}$.

7 **1** **a. i.** $v_n > 10^5 \Leftrightarrow n^2 + n - 10^5 > 0$

$$\Leftrightarrow n \geqslant \frac{-1+\sqrt{1+4\times10^5}}{2}$$

Comme n est un entier naturel, $n \geqslant 316$.

ii. $v_n > 10^{10} \Leftrightarrow n^2 + n - 10^{10} > 0$

$\Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{-1+\sqrt{1+4\times 10^{10}}}{2}$.

Comme n est un entier naturel, $n > 99999$.

b. On conjecture que la suite v diverge vers $+\infty$.

2 Soit $A \geqslant 0$, on a $v_n > A \Leftrightarrow n^2 + n - A > 0$

$\Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{-1+\sqrt{1+4\times A}}{2}$.

Comme n est un entier naturel,

$$n \geqslant 1 + E\left(\frac{-1+\sqrt{1+4\times A}}{2}\right).$$

Donc la suite v diverge vers $+\infty$.

Savoir faire Étudier le comportement à l'infini d'une suite

8 **a.** $\lim\limits_{n\to+\infty}(2n+1) = +\infty$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
Multiplication des limites.

b. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n} = +\infty$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(2\sqrt{n}+5) = +\infty$.
Multiplication des limites. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Division des limites.

9 **a.** Pour tout entier naturel n non nul,

$$u_n = 4\times\frac{1-\dfrac{1}{4n}}{1+\dfrac{4}{n}}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{4n}}{1+\dfrac{4}{n}} = 1$ (somme et quotient de limites). Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.

b. Pour tout entier naturel n non nul,

$$u_n = 2n\times\frac{1-\dfrac{5}{2n}+\dfrac{3}{2n^2}}{1+\dfrac{4}{n}}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2} = 0$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\dfrac{5}{2n}+\dfrac{3}{2n^2}}{1+\dfrac{4}{n}} = 1 \text{ (somme et quotient de limites).}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n = +\infty$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

10 **a.** En utilisant l'algorithme ci-dessous, on obtient en entrant $A = 10^{-5}$: $N = 100\,000$.

ALGO

```
Entrer (A) ;
N ← 2 ;
Tant que |(N² − 1)÷(N³ + 1)| > A Faire
        N ← N + 1
FinTantQue ;
Afficher (N).
```

Savoir faire Déterminer une limite par comparaison

11 **a.** Pour tout entier n non nul, $-1 \leqslant \sin n \leqslant 1$, donc :

$$-\frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n} = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ d'après le théorème des gendarmes.

b. Pour tout entier n non nul, $-1 \leqslant \cos n \leqslant 1$, donc :

$$1-\frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 1+\frac{1}{n}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n} = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ d'après le théorème des gendarmes.

12 **1** **a.** Pour tout entier naturel n,

$$u_n - (n-6) = \frac{n^2-3n+5}{n+3} - n + 6$$
$$= \frac{n^2-3n+5-n(n+3)+6(n+3)}{n+3} = \frac{23}{n+3}.$$

Or, $n+3 > 0$, car n est un entier naturel.
Donc $u_n - (n-6) \geqslant 0$, c'est-à-dire que $u_n \geqslant n-6$.

b. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n-6 = +\infty$, d'après le théorème de minoration $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2 Pour tout entier $n \neq 0$,

$$u_n = \frac{n\left(n-3+\dfrac{5}{n}\right)}{n\left(1+\dfrac{3}{n}\right)} = \frac{n-3+\dfrac{5}{n}}{1+\dfrac{3}{n}}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} n-3+\dfrac{5}{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{3}{n} = 1$. Donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

13 **1** On conjecture que la suite v diverge vers $-\infty$.

2 Pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant \cos n \leqslant 1$, on a $v_n \leqslant -2n+1$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(-2n+1) = -\infty$, d'après le théorème de minoration, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

3 Pour avoir $v_n < -1000$, il suffit d'avoir :
$-2n+1 < -1000$, soit $n > 500{,}5$.
Dès que l'entier n est supérieur à 501, on a : $v_n < -100$.

Savoir faire Déterminer le comportement à l'infini d'une suite récurrente

14 **1** Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$ la propriété : « $4 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$ ».

- **Initialisation :** on a $v_0 = 6$, $v_1 = 4{,}5$, donc $4 \leqslant v_1 \leqslant v_0$. Donc $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** démontrons que si pour **un** entier n, $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$: « $4 \leqslant v_{n+2} \leqslant v_{n+1}$ » est vraie.

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{4}+3$ est une fonction affine croissante, donc en utilisant l'hypothèse de récurrence $4 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$, on a $f(4) \leqslant f(v_{n+1}) \leqslant f(v_n)$, soit $4 \leqslant v_{n+2} \leqslant v_{n+1}$.
C'est-à-dire que la propriété $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion : par récurrence, pour tout entier n, $P(n)$ est vraie.
Donc, pour tout entier naturel n, $4 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$.

2 La suite v est décroissante et minorée, donc elle converge.
On note ℓ la limite de v.

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} v_{n+1} = \ell$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{v_n}{4}+3 = \dfrac{\ell}{4}+3$.

Par unicité de la limite, $\ell = \dfrac{\ell}{4}+3$. Donc $\ell = 4$.

3 $w_{n+1} = v_{n+1}-4 = \dfrac{u_n}{4}+3-4 = \dfrac{1}{4}(v_n-4)$.

Pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = \dfrac{1}{4}w_n$. Donc la suite w est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$ et de premier terme $w_0 = 2$.

Donc pour tout entier naturel n, $w_n = 2\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$. On en déduit $v_n = 4+2\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} 2\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0$ (suite géométrique de raison inférieure à 1 en valeur absolue), on a $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 4$.

15 **a.** Comme $3>1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 3^n = +\infty$. En multipliant par 0,1 (positif), on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

b. Comme $|-0{,}5|<1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} (-0{,}5)^n = 0$. En multipliant par 100, on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

c. Comme $\dfrac{5}{2}>1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{5}{2}\right)^n = +\infty$. En multipliant par 2 (positif), on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} 2\left(\dfrac{5}{2}\right)^n = +\infty$.

Comme $\left|\dfrac{1}{3}\right|<1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$. En multipliant par 4, on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{4}{3^n} = 0$.
Donc, par différence, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Travaux pratiques

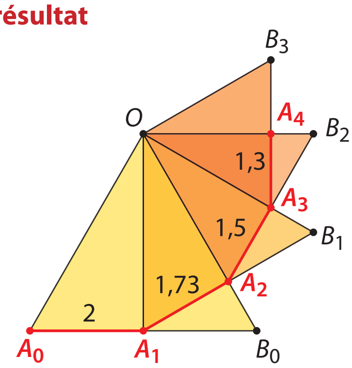
16 Longueur d'une spirale

1 Se faire une idée du résultat

1 Faire la construction.

2 $a_0 = 2$; $a_1 \approx 1{,}73$; $a_2 \approx 1{,}5$ et $a_3 \approx 1{,}3$.
On a :
$\ell_2 \approx 2+1{,}73 \approx 3{,}73$ et $\ell_3 \approx 5{,}2$.

3 La suite a semble géométrique de raison 0,8.



2 Valider la conjecture formulée

1 Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$ la propriété : « OA_nB_n est équilatéral ».
Initialisation : OA_0B_0 est équilatéral. Donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité : démontrons que si pour **un** entier n, $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$: « $OA_{n+1}B_{n+1}$ est équilatéral » est vraie.
D'après l'hypothèse de récurrence, OA_nB_n est équilatéral. La droite (OA_{n+1}) est la médiatrice du segment $[A_nB_n]$, donc $\widehat{A_{n+1}OA_n} = 30°$. Donc, par construction du symétrique B_{n+1}, le triangle $OA_{n+1}B_{n+1}$ est équilatéral.
C'est-à-dire que la propriété $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion : par récurrence, pour tout entier naturel n, $P(n)$ est vraie. Donc, pour tout entier naturel n, le triangle OA_nB_n est équilatéral.

2 On a, pour tout entier naturel n : $c_{n+} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}c_n$. La suite c est géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et de premier terme 4. Comme $a_n = \dfrac{c_n}{2}$, la suite a est géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et de premier terme 2.

3 ℓ_n est la somme des n premiers terme d'une suite géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et de premiers termes 2, donc :

$$\ell_n = 2\times\frac{1-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1}.$$

On a donc : $\ell_n = 4(2+\sqrt{3})\left(1-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right)$.

4 Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0$ (suite géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ inférieure à 1 en valeur absolue), on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \ell_n = 4(2+\sqrt{3})$ (opération sur les limites).

17 Convergence d'une suite

Objectifs : *Construire un algorithme pour étudier une somme. Utiliser le théorème des gendarmes.*

Partie A

1 Extrait de l'algorithme complété :

ALGO
```
Pour i allant de n à 1 Faire
u ← u + sin i/n²
FinPour ;
```

2 Après avoir programmé cet algorithme, on obtient : $u_{10} \approx 0{,}549$, $u_{50} \approx 0{,}505$ et $u_{100} \approx 0{,}504$.

3 Il semble que la suite u soit décroissante et converge vers 0,5.

Partie B

1 On a $v_n = \dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2}$.

Donc $v_n = \dfrac{\dfrac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n}$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2n} = 0$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \dfrac{1}{2}$.

2 Pour tout entier i compris ente 1 et n, $\frac{i}{n^2} \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.
On a $\frac{i}{n^2} - \frac{1}{6}\left(\frac{i}{n^2}\right)^3 \leqslant \sin\frac{i}{n^2} \leqslant \frac{i}{n^2}$, soit, en sommant membres à membres ces inégalités pour i variant de 1 à n, $v_n - \frac{1}{6n^6}\left[1^3 + 2^3 + \ldots + n^3\right] \leqslant u_n \leqslant v_n$.
Donc, pour tout entier naturel n non nul,

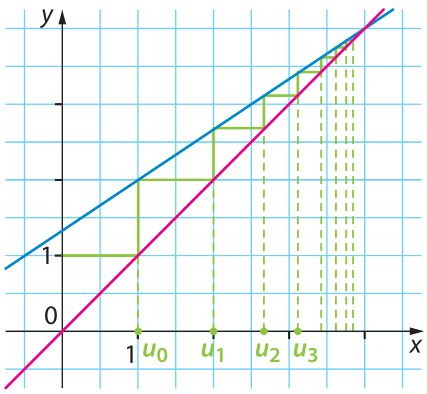
$$v_n - \frac{1}{24}\frac{(n+1)^2}{n^4} \leqslant u_n \leqslant v_n.$$

3 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{24}\frac{(n+1)^2}{n^4} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{24n^2} = 0$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{2}$, on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$ (d'après le théorème des gendarmes).

18 Étudier une suite arithmético-géométrique par deux méthodes

Objectif : *Mettre en œuvre deux méthodes de base pour démontrer la convergence d'une suite.*

1 $u_1 = 2$,
$u_2 = \frac{8}{3}$,
$u_3 = \frac{28}{9}$.



2 a. b. Voir le graphique ci-contre.
c. La suite u semble croissante et majorée par 4.

3 a. Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$ la propriété : « $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$ ».
◗ **Initialisation :**
$u_0 = 1$, $u_2 = 2$. Donc $P(0)$ est vraie.
◗ **Hérédité :** démontrons que si, pour **un** entier n, $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$:
« $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4$ » est vraie.
La fonction f est une fonction affine croissante.
D'après l'hypothèse de récurrence $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$, donc $f(u_{n+1}) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(4)$ et comme $f(4) = 4$, on obtient $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4$.
C'est-à-dire que la propriété $P(n+1)$ est vraie.
◗ **Conclusion :** par récurrence, pour tout entier naturel n, $P(n)$ est vraie.
Donc, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$. La suite u est croissante et majorée par 4.
b. La suite u est croissante et majorée par 4, donc elle converge.
Sa limite est une solution de l'équation $f(x) = x$, soit $x = \frac{2x+4}{3}$, soit $x = 4$. La suite u converge vers 4.

4 a. On a :
$v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = \frac{2u_n + 4}{3} - 4 = \frac{2}{3}(u_n - 4)$.
Donc, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$. La suite v est géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = -3$.

b. Pour tout entier naturel n, $v_n = -3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
Donc $u_n = 4 - 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
c. On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ (suite géométrique de raison strictement inférieure à 1). Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.

19 Étudier le comportement à l'infini d'une suite

Objectif : *Conjecturer et prendre des initiatives dans le type de démonstration à utiliser.*

1 Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$ la propriété : « $u_n \neq 0$ ».
◗ **Initialisation :** $u_0 = a \neq 0$, $P(0)$ est vraie.
◗ **Hérédité :** démontrons que si, pour **un** entier n, $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$: « $u_{n+1} \neq 0$ » est vraie.
$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} = \frac{(u_n)^2 + 1}{u_n}$, donc $u_{n+1} \neq 0$.
C'est-à-dire que la propriété $P(n+1)$ est vraie.
◗ **Conclusion :** par récurrence, pour tout entier naturel n, $P(n)$ est vraie.
Donc, pour tout entier naturel n, $u_n \neq 0$. La suite u est bien définie.
2 a. Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$ la propriété : « $u_n > 0$ ».
◗ **Initialisation :** $u_0 = a > 0$, $P(0)$ est vraie.
◗ **Hérédité :** démontrons que si, pour **un** entier n, $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$: « $u_{n+1} > 0$ » est vraie.
$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} = \frac{(u_n)^2 + 1}{u_n} > 0$, donc $u_{n+1} > 0$.
C'est-à-dire que la propriété $P(n+1)$ est vraie.
◗ **Conclusion :** par récurrence, pour tout entier naturel n, $P(n)$ est vraie.
Donc, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$ d'après ce qui précède. Donc la suite u est croissante.
Si la suite u est majorée, alors, comme elle est croissante, elle converge vers ℓ solution de l'équation $x = x + \frac{1}{x}$.
Cette équation n'a pas de solution, donc la suite n'est pas majorée. Et comme elle est croissante, elle diverge vers $+\infty$.
b. Dans le cas $a < 0$, en utilisant les mêmes méthodes, on prouve que la suite u est négative, décroissante et qu'elle tend vers $-\infty$.

20 Des « 1 » partout !

Objectif : *Conjecturer, faire des recherches et bâtir une démonstration.*
◗ Par construction, le réel cherché (s'il existe) est la limite de la suite u définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$.
◗ Si la suite u converge, elle converge vers une solution de l'équation $x = 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$.

Cette équation admet deux solutions $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = \dfrac{1}{\varphi}$, où φ est le nombre d'or.

Comme la suite u est simplement minorée par 1, elle ne peut converger que vers φ.

Comme $\varphi = 1 + \dfrac{1}{\varphi}$, on a :

$$u_{n+1} - \varphi = 1 + \frac{1}{u_n} - 1 - \frac{1}{\varphi}$$

soit : $$|u_{n+1} - \varphi| = \frac{|u_n - \varphi|}{u_n\varphi}.$$

Donc, comme pour tout entier naturel n, on a :

$$|u_{n+1} - \varphi| \leqslant \frac{1}{\varphi}|u_n - \varphi| \ (1).$$

Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$ la propriété :

$$\text{« } |u_n - \varphi| \leqslant \left(\frac{1}{\varphi}\right)^n |u_0 - \varphi| \text{ ».}$$

Initialisation : $|u_0 - \varphi| \leqslant \left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^0 |u_0 - \varphi|$, donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : démontrons que si, pour un entier n, $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$: « $|u_{n+1} - \varphi| \leqslant \left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^{n+1} |u_0 - \varphi|$ » est vraie.

D'après l'inégalité (1), $|u_{n+1} - \varphi| \leqslant \dfrac{1}{\varphi}|u_n - \varphi|$ et en utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$|u_{n+1} - \varphi| \leqslant \frac{1}{\varphi} \times \left(\frac{1}{\varphi}\right)^n |u_0 - \varphi|.$$

Donc $|u_{n+1} - \varphi| \leqslant \left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^{n+1} |u_0 - \varphi|$.

C'est-à-dire que la propriété $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : par récurrence, pour tout entier naturel n, $P(n)$ est vraie. Comme $\dfrac{1}{\varphi} < 1$, la suite géométrique de terme général $\left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^n |u_0 - \varphi|$ converge vers 0.

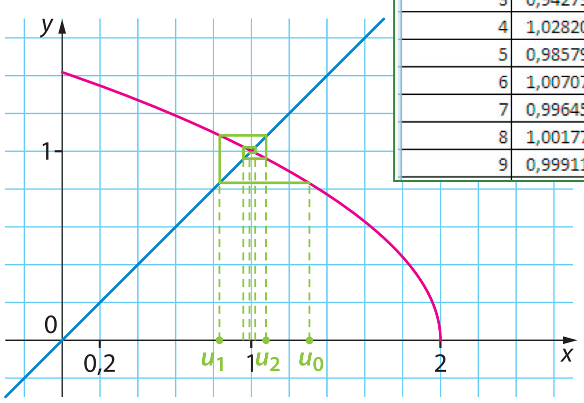
Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \varphi| = 0$. La suite u converge vers φ.

21 Que de racines !

Objectif : *Conjecturer, faire des recherches et bâtir une démonstration.*

Que ce soit à l'aide de Geogébra ou à l'aide d'un tableur, on conjecture que la suite u n'est pas monotone, mais semble converger vers 1.

n	un
0	1,4142135
1	0,7653668
2	1,1111404
3	0,9427934
4	1,0282054
5	0,9857963
6	1,0070767
7	0,9964553
8	1,0017707
9	0,9991142



Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$ la propriété : « $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{3}{2}$ ».

Initialisation : $\dfrac{1}{2} \leqslant \sqrt{2} \leqslant \dfrac{3}{2}$, $P(0)$ est vraie.

Hérédité : démontrons que si, pour **un** entier n, $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$: « $\dfrac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{3}{2}$ » est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{3}{2}$.

Donc $\dfrac{1}{2} \leqslant 2 - u_n \leqslant \dfrac{3}{2}$, soit $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \sqrt{2 - u_n} \leqslant \sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Comme $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sqrt{\dfrac{3}{2}} \leqslant \dfrac{3}{2}$, on a $\dfrac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{3}{2}$.

C'est-à-dire que la propriété $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : par récurrence, pour tout entier naturel n, $P(n)$ est vraie.

$$u_{n+1} - 1 = \sqrt{2 - u_n} - 1 = \frac{2 - u_n - 1}{\sqrt{2 - u_n} + 1}$$

$$= (1 - u_n) \times \frac{1}{\sqrt{2 - u_n} + 1}.$$

Comme $\dfrac{1}{2} \leqslant \sqrt{2 - u_n} \leqslant \dfrac{3}{2}$, on a :

$$\frac{3}{2} \leqslant 1 + \sqrt{2 - u_n} \leqslant \frac{5}{2}.$$

Donc : $$\frac{1}{\sqrt{2 - u_n} + 1} \leqslant \frac{2}{3}.$$

On en déduit que pour tout entier naturel n :

$$|u_{n+1} - 1| \leqslant \frac{2}{3}|u_n - 1|.$$

Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$ la propriété :

$$\text{« } |u_n - 1| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n |\sqrt{2} - 1| \text{ ».}$$

Initialisation : $|\sqrt{2} - 1| \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^0 |\sqrt{2} - 1|$, $P(0)$ est vraie.

Hérédité : démontrons que si, pour un entier n, $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$: « $|u_{n+1} - 1| \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} |\sqrt{2} - 1|$ » est vraie. On a vu que $|u_{n+1} - 1| \leqslant \dfrac{2}{3}|u_n - 1|$.

Donc, en utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient $|u_{n+1} - 1| \leqslant \dfrac{2}{3} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n |\sqrt{2} - 1|$, soit :

$$|u_{n+1} - 1| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} |\sqrt{2} - 1|.$$

C'est-à-dire que la propriété $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : par récurrence, pour tout entier naturel n, $P(n)$ est vraie. Comme $0 < \dfrac{2}{3} < 1$, la suite géométrique de terme général $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n |\sqrt{2} - 1|$ converge vers 0.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - 1| = 0$. La suite u converge vers1.

Faire le point

25 **1** **a.** et **b.** **2** **c.** **3** **a.** et **c.** **4** **c.**
5 **a.** et **b.** **6** **b.** et **c.** **7** **b.** **8** **c.**

26 **1** **a.** Faux. **b.** Vrai. **c.** Faux. **d.** Faux.
2 Vrai. **3** Faux. **4** Vrai.

Exercices d'application

1 Raisonnement par récurrence

27 **1** Vrai. **2** Vrai. **3** Vrai. **4** Vrai. **5** Vrai.

28 **1** **a.** Vrai, car si $6^n - 1 = 5k$, alors :
$6^{n+1} - 1 = 6 \times 6^n - 1 = 6 \times (5k+1) - 1 = 5(6k+1)$.
b. Vrai. **c.** Faux.
2 **a.** Vrai, car si $6^n + 1 = 5k$, alors :
$6^{n+1} + 1 = 6 \times 6^n + 1 = 6 \times (5k-1) + 1 = 5(6k-1)$.
b. Faux. **c.** Vrai, par exemple $n = 1$.

Démontrer par récurrence

29 **1** Propriété pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$P(n) : 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Initialisation : $1^3 = \dfrac{1^2(1+1)^2}{4}$; vrai.

Démontrons que si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est aussi vraie.

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3.$$

Donc, en factorisant :

$$1^3 + 2^3 + \ldots + (n+1)^3 = (n+1)^2\left[\frac{n^2}{4} + (n+1)\right].$$

Donc $1^3 + 2^3 + \ldots + (n+1)^3 = \dfrac{(n+1)^2}{4}\left[(n+2)^2\right]$.

La propriété $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

2 Propriété $P(n)$ pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\frac{1}{1\times2\times3} + \frac{1}{2\times3\times4} + \ldots + \frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

Initialisation : pour $n = 1$,

$$\frac{1}{1\times2\times3} = \frac{1}{6} \text{ et } \frac{1(1+3)}{4(1+1)(1+2)} = \frac{1}{6}.$$

Donc $P(1)$ est vraie.

Démontrons que si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est aussi vraie.

$$\text{Soit } A = \frac{1}{1\times2\times3} + \frac{1}{2\times3\times4} + \ldots + \frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

$$\text{Donc } A = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

soit, en factorisant :

$$A = \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left[\frac{n(n+3)}{4} + \frac{1}{(n+3)}\right]$$
$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left[\frac{n^3+6n^2+9n+4}{4(n+3)}\right];$$

donc :

$$A = \frac{(n+1)^2(n+4)}{4(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)};$$

la propriété $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{1\times2\times3} + \frac{1}{2\times3\times4} + \ldots + \frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

30 Propriété $P(n)$ pour tout entier $n \geqslant 0$:
« la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $(f_n)'(x) = nx^{n-1}$ ».

Initialisation : $f_0 : x \mapsto 1$. Donc, pour tout réel x, $(f_0)'(x) = 0$, donc $P(0)$ est vraie.

Démontrons que si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est aussi vraie.

Soit $f_{n+1}(x) = x^{n+1} = x \times f_n(x)$,
donc $(f_{n+1})'(x) = f_n(x) + x \times (f_n)'(x)$ soit, en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$(f_{n+1})'(x) = x^n + x \times nx^{n-1} = (n+1)x^n.$$

La propriété $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout entier n, $(f_n)'(x) = nx^{n-1}$.

31 Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $P(n)$ la propriété : « $n! \geqslant 2^{n-1}$ ».

Initialisation : pour $n = 1$, on a $1! = 1$ et $2^{1-1} = 1$. Donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité : on suppose que pour **un** entier $n \geqslant 1$, $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire que : $n! \geqslant 2^{n-1}$.
On a $(n+1)! = (n+1) \times n!$.
D'après l'hypothèse de récurrence, on a :

$$(n+1)! \geqslant (n+1) \times 2^{n-1}.$$

Or, $n \geqslant 1$. Donc $n+1 \geqslant 2$ et $(n+1) \times 2^{n-1} \geqslant 2 \times 2^{n-1}$.
On en déduit que $(n+1)! \geqslant 2^n$, c'est-à-dire que la propriété $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : par récurrence, pour tout entier $n \geqslant 1$, $P(n)$ est vraie.
Donc pour tout entier $n \geqslant 1$, $n! \geqslant 2^{n-1}$.

32 Soit $P(n)$ la propriété définie sur $\mathbb{N}$ par :

« $4^n + 1$ est divisible par 3 ».

Ce raisonnement est inexact, car on ne peut pas initialiser la récurrence.

33 Soit la propriété : « $1! + 2! + \ldots + (n-1)! \leqslant n!$ ».

Initialisation : $P(2)$: $1! \leqslant 2!$ est vraie.

Démontrons que si $P(n)$ est vraie, alors :

$$1! + 2! + \ldots + (n-1)! + n! \leqslant (n+1)!$$

On a, en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$1! + 2! + \ldots + (n-1)! + n! \leqslant n! + n!$$

Mais $2n! \leqslant (n+1)!$. On a donc :

$$1! + 2! + \ldots + (n-1)! + n! \leqslant (n+1)!$$

Conclusion : pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$1! + 2! + \ldots + (n-1)! \leqslant n!$$

34 Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose :

$$P(n) : \text{« } 2^n \geqslant (n+1)^2 \text{ ».}$$

1 Supposons que $2^n \geqslant (n+1)^2$, démontrons que :

$$2^{n+1} \geqslant (n+2)^2.$$

D'après l'hypothèse de récurrence $2 \times 2^n \geqslant 2(n+1)^2$.

On a :

$$2(n+1)^2-(n+2)^2=n^2-2\geqslant 0 \text{ si } n\geqslant 2.$$

Donc $2(n+1)^2\geqslant(n+2)^2$. On en déduit que $P(n+1)$ est vraie.

2 $P(6)$ est vraie, donc pour tout entier $n\geqslant 6$:

$$2^n\geqslant(n+1)^2.$$

Étudier des suites

35 **1** $v_1=1$, $v_2=4$, $v_3=9$, $v_4=16$.

On conjecture que pour tout entier naturel n, $v_n=n^2$.

2 Propriété $P(n)$ pour tout entier $n\geqslant 0$: « $v_n=n^2$ ».

▶ **Initialisation :** $0^2=0=v_0$.

▶ Démontrons que si, pour un entier n, $v_n=n^2$, alors $v_{n+1}=(n+1)^2$.

On a :

$$v_{n+1}=v_n+2n+1=n^2+2n+1=(n+1)^2.$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

▶ **En conclusion**, pour tout entier naturel n, $v_n=n^2$.

36 **1** La droite $\mathcal{D}$ a pour équation $y=0{,}5x+1$; la droite Δ a pour équation $y=x$.

On lit $u_1=-0{,}5$; $u_2\approx 0{,}8$ et $u_3\approx 1{,}4$.

2 Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$ la propriété :

« $u_n\leqslant 2$ ».

▶ **Initialisation :** pour $n=0$, on a :

$$u_0=-3\leqslant 2.$$

Donc $P(0)$ est vraie.

▶ **Hérédité :** on suppose que pour **un** entier $n\geqslant 0$, $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire que : $u_n\leqslant 2$.

On en déduit que :

$$0{,}5u_n+1\leqslant 0{,}5\times 2+1,$$

soit $0{,}5u_n+1\leqslant 2$.

Ainsi $u_{n+1}\leqslant 2$, c'est-à-dire que la propriété $P(n+1)$ est vraie.

▶ **Conclusion :** par récurrence, pour tout entier $n\geqslant 0$, $P(n)$ est vraie.

Donc, pour tout entier $n\geqslant 0$, $u_n\leqslant 2$.

3 Pour tout entier n,

$u_{n+1}-u_n=0{,}5u_n+1-u_n=1-0{,}5u_n=0{,}5(2-u_n)$.

Comme $u_n\leqslant 2$, on a :

$$2-u_n\geqslant 0.$$

On en déduit que pour tout entier n, $u_{n+1}-u_n\geqslant 0$.

Donc la suite u est croissante.

37 **1** Voir le schéma ci-après.

La suite v semble croissante.

2 On pose pour tout entier n, $P(n)$:

« $v_n\geqslant 0$ ».

▶ **Initialisation :** $v_0=0$, donc $P(0)$ est vraie.

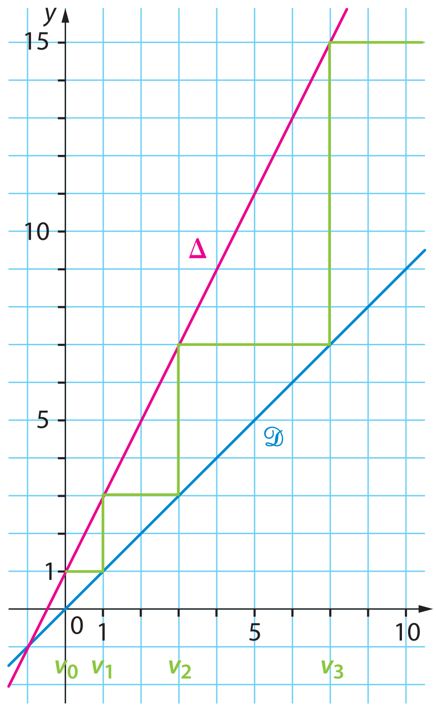
▶ Démontrons que si $v_n\geqslant 0$, alors $v_{n+1}\geqslant 0$.

Si $v_n\geqslant 0$, alors $2v_n+1\geqslant 1$,

donc $v_{n+1}\geqslant 0$.

▶ **Conclusion :** pour tout entier naturel n, $v_n\geqslant 0$.

3 $v_{n+1}-v_n\geqslant v_n+1\geqslant 0$ d'après la question précédente. Donc, pour tout entier naturel n, $v_{n+1}\geqslant v_n$. La suite v est croissante.



38 On pose, pour tout entier naturel n,

$$P(n) : u_n=4\times 3^n-1.$$

▶ **Initialisation :** $u_0=4\times 3^0-1=3$. $P(0)$ est vraie.

▶ Démontrons que si $P(n)$ est vraie alors :

$$u_{n+1}=4\times 3^{n+1}-1.$$

En tenant compte de l'hypothèse de récurrence,

$u_{n+1}=3u_n+2=3(4\times 3^n-1)+2=4\times 3^{n+1}-1$.

▶ **Conclusion :** pour tout entier n, $u_n=4\times 3^n-1$.

39 Démontrons par récurrence la propriété :

$$P(n) : « 1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n ».$$

▶ **Initialisation :** comme $u_1=\sqrt{8+1}=3$,

$P(0)$ $1\leqslant u_1\leqslant u_0$ est vraie.

▶ Démontrons que si $P(n)$ est vraie, alors :

$$1\leqslant u_{n+2}\leqslant u_{n+1}.$$

En tenant compte de l'hypothèse de récurrence et comme $f : x\longmapsto\sqrt{x+1}$ est une fonction croissante, on a :

$$f(1)\leqslant f(u_{n+1})\leqslant f(u_n),$$

donc comme $1\leqslant\sqrt{2}$, on a : $1\leqslant u_{n+2}\leqslant u_{n+1}$.

▶ **Conclusion :** la suite u est minorée par 1 et décroissante.

40 **1** Pour tout réel $x\in\,]-1;+\infty[$,

$$f'(x)=\frac{6}{(x+1)^2}>0.$$

La fonction f est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$.

1 Démontrons par récurrence la propriété :

$$P(n) : « u_n>2 ».$$

▶ **Initialisation :** $P(0) : u_0=3>2$ est vraie.

▶ Démontrons que si $P(n)$ est vraie, alors $u_{n+1}>2$.

En tenant compte de l'hypothèse de récurrence et comme f est une fonction croissante, on a $f(u_n)>f(2)$, donc comme $f(2)=2$, on a $u_{n+1}>2$.

▶ **Conclusion :** pour tout entier naturel n, $u_n>2$.

3 Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n)^2+3u_n-2}{u_n+1}=\frac{(2-u_n)(u_n-1)}{u_n+1}.$$

Comme $u_n > 2$, $2 - u_n < 0$ et $u_n - 1 \geqslant 0$, donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$.
La suite u est décroissante.

41 Démontrons par récurrence la propriété :

$P(n)$: « pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{3^n - 1}{2}$ ».

Initialisation :

comme $u_0 = \dfrac{3^0 - 1}{2} = 0$ et $u_1 = \dfrac{3^1 - 1}{2} = 1$, $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.

Soit un entier $n \geqslant 1$. Démontrons que si $P(n)$ est vraie, alors $u_{n+1} = \dfrac{3^{n+1} - 1}{2}$.

En tenant compte de l'hypothèse de récurrence

$$u_{n+1} = 4\frac{3^n - 1}{2} - 3\frac{3^{n-1} - 1}{2} = \frac{4 \times 3^n - 4 - 3^n + 3}{2},$$

soit : $$u_{n+1} = \frac{3^{n+1} - 1}{2}.$$

Conclusion : pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{3^n - 1}{2}$.

2 Limite finie ou infinie d'une suite

42 **a.** Faux. **b.** Faux. **c.** Vrai. **d.** Faux.

43 **a.** Faux. **b.** Vrai. **c.** Vrai. **d.** Faux.

44 **1** Faux. **2** Faux.

Utiliser des définitions

45 **1** **a.** $0 \leqslant u_n < e \Leftrightarrow \dfrac{1}{n} < e \Leftrightarrow n > \dfrac{1}{e} \geqslant E\left(\dfrac{1}{e}\right)$.

b. Pour tout réel e strictement positif, il existe un entier $p = 1 + E\left(\dfrac{1}{e}\right)$ tel que dès que $n \geqslant p$, on a $0 \leqslant u_n < e$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

2 On démontre de même que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

46 **1** Comme la suite u converge vers ℓ, pour $\varepsilon < \dfrac{\ell' - \ell}{2}$, il existe un entier p tel que si $n \geqslant p$, alors $u_n \in \left]\ell - \varepsilon\,; \ell + \varepsilon\right[$.

2 Comme la suite u converge vers ℓ', pour $\varepsilon < \dfrac{\ell' - \ell}{2}$, il existe un entier m tel que si $n \geqslant m$, alors $u_n \in \left]\ell' - \varepsilon\,; \ell + \varepsilon\right[$.

Comme les deux intervalles précédents sont disjoints, dès que $n \geqslant \sup(p, m)$ il y a impossibilité. Donc les limites ℓ et ℓ' ne peuvent pas être différentes.

47 Soit e un réel strictement positif.

1 Pour $x \in [0\,; +\infty[$, $\dfrac{3}{2x+1} < e \Leftrightarrow x > \dfrac{3 - e}{2e}$.

2 **a.** On pose $p = 1 + E\left(\dfrac{3 - e}{2e}\right)$. Pour tout entier $n \geqslant p$, on a $0 \leqslant u_n < e$.

b. On en déduit que la suite u converge vers 0.

48 **a.** • La suite u est décroissante.
• On conjecture que la suite u converge vers 0.
• Pour $n \geqslant 20\,000$, $u_n \in \left]-10^{-4}\,; 10^{-4}\right[$.
• Pour tout réel $e > 0$, il existe un entier $p = 1 + E\left(\dfrac{2}{e}\right)$ tel que si $n \geqslant p$, alors $|u_n| < e$.
Donc la suite u converge vers 0.

b. • La suite u est décroissante.
• On conjecture que la suite u converge vers 0.
• Pour $n \geqslant 99\,980\,001$, $u_n \in \left]-10^{-4}\,; 10^{-4}\right[$.
• Pour tout réel $e > 0$, il existe un entier $p = 1 + E\left(\left(1 - \dfrac{1}{e}\right)^2\right)$ tel que si $n \geqslant p$ alors $|u_n| < e$.
Donc la suite u converge vers 0.

49 **a.** • La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1 - 3x}{x + 2}$ est telle que $f'(x) = \dfrac{-7}{(x+2)^2} < 0$. Donc la fonction f est décroissante sur $[0\,; +\infty[$. La suite u est décroissante.
• On conjecture que la suite u converge vers -3.
• Pour $n \geqslant 69\,999$, $u_n \in \left]-3 - 10^{-4}\,; -3 + 10^{-4}\right[$.
• Pour tout réel $e > 0$, il existe un entier $p = 1 + E\left(\dfrac{7}{e}\right)$ tel que si $n \geqslant p$, alors $|u_n + 3| < e$.
Donc la suite u converge vers -3.

b. • La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{1 + x^2}$ est telle que $f'(x) = \dfrac{2x}{(1 + x^2)^2} \geqslant 0$. Donc la fonction f est croissante sur $[0\,; +\infty[$. La suite u est croissante.
• On conjecture que la suite u converge vers 1.
• Pour $n \geqslant 100$, $u_n \in \left]1 - 10^{-4}\,; 1 + 10^{-4}\right[$.
• Pour tout réel $e > 0$, il existe un entier p tel que si $n \geqslant p$, alors $|u_n - 1| < \text{e}$ (il suffit que $p^2 > \dfrac{1}{e} - 1$).
Donc la suite u converge vers 1.

50 **1** On considère une suite u qui converge vers ℓ. Pour tout réel $e > 0$, il existe un entier p tel que si $n \geqslant p$, alors $u_n \in \left]\ell - e\,; \ell + e\right[$.
On pose M le plus grand des réels $u_0, u_1, \ldots, u_p, \ell + e$.
Alors, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant M$.
Donc la suite u est majorée.
On démontre de même que la suite u est minorée.

2 Une suite peut être bornée sans pour autant converger, par exemple, la suite géométrique de raison -1.

51 **1** Soit un réel A.
• $A < 0$, pour tout entier naturel $u_n > A$.
• Si $A \geqslant 0$, alors $u_n > A \Leftrightarrow n > A^2$.

2 Quel que soit le réel A, dès qu'on a $n > A^2$, on a $u_n > A$.
Donc la suite u diverge vers $+\infty$.

52 **1** On résout :

$u_n > 10 \Leftrightarrow \dfrac{n^2 + 3}{n} > 10 \Leftrightarrow n^2 - 10n + 3 > 0$, car $n \geqslant 1$.

On calcule $\Delta = 88$; $x_1 = 5 - \sqrt{22} \approx 0{,}3$ et $x_2 = 5 + \sqrt{22} \approx 9{,}7$.

Comme n est entier, on a $u_n > 10 \Leftrightarrow n \geqslant 10$.

Ainsi, à partir du rang $n_0 = 10$, tous les termes de la suite u appartiennent à l'intervalle $]10\,;+\infty[$.

2 On résout :

$$u_n > A \Leftrightarrow \frac{n^2+3}{n} > A \Leftrightarrow n^2 - A\times n + 3 > 0, \text{car } n \geqslant 1.$$

On calcule $\Delta = A^2 - 12$.

• Si $|A| < \sqrt{12}$, on a $\Delta < 0$, et, pour tout entier n, $n^2 - A\times n + 3 > 0$. On peut choisir $n_0 = 0$.

• Si $|A| = \sqrt{12}$, on a $\Delta = 0$, et, pour tout entier $n \neq \frac{A}{2}$, $n^2 - A\times n + 3 > 0$. On peut choisir $n_0 = 0$.

• Si $|A| > \sqrt{12}$, on a $\Delta > 0$, et pour tout entier $n > \frac{A+\sqrt{A^2-12}}{2}$, $n^2 - A\times n + 3 > 0$.

On peut choisir $n_0 = E\left(\frac{A+\sqrt{A^2-12}}{2}\right) + 1$.

Ainsi, à partir du rang n_0, tous les termes de la suite u appartiennent à l'intervalle $]A\,;+\infty[$.

3 Par définition, la suite u diverge vers $+\infty$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

53 **1** • La fonction $f : x \longmapsto 2x^2 - 3$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$. La suite u est croissante.

On conjecture que la suite u diverge vers $+\infty$.

i. Pour $n \geqslant 224$, alors $u_n \geqslant 10^5$.

ii. Pour $n \geqslant 707\,107$, alors $u_n > 10^{12}$.

• Pour tout réel $A > 0$, il existe un entier $p \geqslant \sqrt{\frac{A+3}{2}}$ tel que si $n \geqslant p$, alors $u_n \geqslant A$.

Donc la suite u diverge vers $+\infty$.

2 • La fonction $f : x \longmapsto 2\sqrt{x} + 5$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$. La suite u est croissante.

On conjecture que la suite u diverge vers $+\infty$.

i. Pour $n \geqslant 3\times 10^9$, alors $u_n > 10^5$.

ii. Pour $n \geqslant 3\times 10^{23}$, alors $u_n > 10^{12}$.

• Pour tout réel $A > 0$, il existe un entier $p \geqslant \left(\frac{A-5}{2}\right)^2$ tel que si $n \geqslant p$, alors $u_n \geqslant A$.

Donc la suite u diverge vers $+\infty$.

54 Soit $A > 0$. On a $-2n^2 + 3 < -A \Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{A+3}{2}}$.

Pour tout réel $A > 0$, il existe un entier

$p = 1 + E\left(\sqrt{\frac{A+3}{2}}\right)$ tel que si $n \geqslant p$, alors $v_n \leqslant -A$.

La suite v diverge vers $-\infty$.

Utiliser des opérations sur les limites

55 **1** **a.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$;

$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$.

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$;

$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 - n^2 = -\infty$.

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$;

$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} 3 = 3$.

d. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$;

$u_n + v_n = (-1)^n$ qui n'a pas de limite.

2 **a.** $u_n = n^2$ et $v_n = \frac{1}{n}$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\times v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$.

b. $u_n = n$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\times v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

c. $u_n = n^2$ et $v_n = -\frac{1}{n}$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\times v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -n = -\infty$

d. $u_n = n$ et $v_n = \frac{4}{n}$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\times v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 4 = 4$.

56 **a.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -4n = -\infty$.

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$.

57 **a.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$.

58 **a.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{2n} = 0$.

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 5$.

59 **a.** Pour tout entier $n \neq 0$,

$$u_n = \frac{n\left(3-\frac{5}{n}\right)}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \frac{3-\frac{5}{n}}{2+\frac{1}{n}}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 - \frac{5}{n} = 3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 + \frac{1}{n} = 2$.

Donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{3}{2}$.

b. Pour tout entier $n \neq 0$,

$$u_n = \frac{n^2\left(1-\frac{2}{n}\right)}{n\left(\frac{3}{n}+1\right)} = \frac{n\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\frac{3}{n}+1}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{2}{n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n} + 1 = 1$.

Donc, par produit et quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

60 **a.** La suite u est divergente.

b. On a $v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}+\sqrt{n} = +\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

61 **a.** On a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\sqrt{n} = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

62 **a.** On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n^2} = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

b. On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$,

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=+\infty$.

63 **a.** $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n}{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3}{n}=0$.

b. $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n^2}{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}3=3$.

64 **a.** $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-n^2}{2n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-1}{2}=-\dfrac{1}{2}$.

b. $v_n=\dfrac{n^2+n-1^{-1/n}}{2n^2}$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n^2}{2n^2}\right)=\dfrac{1}{2}$.

En situation

65 **1** Il semble que la suite u converge vers 0 :

n	u(n)
29	.03226
30	.03125
31	.0303
32	.02941
33	.02857
34	.02778
35	.02703

u(n)■u(n−1)/(1+...

2 Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}}+1=\frac{1+u_n}{u_n}+1=\frac{1}{u_n}+1+1=v_n+1.$$

Donc la suite v est arithmétique de raison 1 et de terme initial $v_0=\dfrac{1}{u_n}+1=2+1=3$.

3 Pour tout entier n, $v_n=3+1\times n=3+n$.

Or, $v_n=\dfrac{1}{u_n}+1$. Donc $u_n=\dfrac{1}{v_n-1}=\dfrac{1}{2+n}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2+n}=0$, la suite u converge vers 0.

66 **1** La fonction $f:x\mapsto\dfrac{x+1}{2x^3+1}$ est telle que :

$$f'(x)=-\frac{4x^3+6x^2-1}{(2x^3+1)^2}<0 \text{ sur } [1;+\infty[.$$

Donc la fonction f est décroissante.
La suite u est décroissante.

2 On a $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{2n^3}=0$.

3 **a.** La distance entre u_n et 0 est égale à $\dfrac{n+1}{2n^3+1}$.

b. On modifie l'algorithme comme ci-dessous.

c. i. Pour $e=10^{-2}$ on obtient $N=8$.

ii. Pour $e=10^{-5}$ on obtient $N=225$.

ALGO

Variables :
  N : entier ; e : réel
Début :
  Entrer (e)
  $N\leftarrow 0$;
  TantQue $\dfrac{N+1}{2N^3+1}\geqslant e$ faire
    $N\leftarrow N+1$;
  FinTantQue
  Afficher (N) ;
Fin.

3 Limites et comparaison

67 **1** **a.** Vrai. **b.** Faux. **c.** Vrai.
2 Faux.

68 **1** Vrai. **2** Faux. **3** Vrai. **4** Vrai.

Théorème de majoration, de minoration

69 **1** C'est la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$.

2 Comme à partir du rang p, $v_n<A$ et $u_n\leqslant v_n$, on en déduit que, pour tout entier $n\geqslant p$, $u_n<A$. On en déduit que la suite u diverge vers $-\infty$.

70 **a.** Pour tout entier naturel n, $n^2-n\leqslant u_n\leqslant n^2+n$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2-n=+\infty$, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty.$$

b. Pour tout entier naturel n, $-3n\leqslant u_n\leqslant -n$, comme $\lim\limits_{n\to+\infty}-n=-\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$.

71 **1** La fonction $x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.
Donc pour tout entier k tel que $1\leqslant k\leqslant n$,

$$1\geqslant\frac{1}{\sqrt{k}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

2 Pour tout entier $n\geqslant 1$:

$1\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{n}}$; $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{n}}$; $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{n}}$; ... ;

$\dfrac{1}{\sqrt{n-1}}\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

En ajoutant membre à membre, on obtient :

$u_n\geqslant\underbrace{\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}_{n\text{ termes}}$. Donc $u_n\geqslant n\times\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Ainsi, $u_n\geqslant\sqrt{n}$.

3 Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$, d'après le théorème de minoration, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

72 **1** Il semble que la suite u diverge vers $-\infty$.

2 **a.** Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$ la propriété : « $v_n\leqslant 0$ ».

- **Initialisation :** pour $n=0$, on a $v_0=0\leqslant 0$.
Donc $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** on suppose que pour **un** entier $n\geqslant 0$, $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire que : $v_n\leqslant 0$.
On en déduit que $2v_n-3\leqslant -3$, soit $v_{n+1}\leqslant -3$.
Ainsi, $v_{n+1}\leqslant 0$, c'est-à-dire que la propriété $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion :** par récurrence, pour tout entier $n\geqslant 0$, $P(n)$ est vraie.

Donc, pour tout entier $n\geqslant 0$, $v_n\leqslant 0$.
Or, $v_{n+1}-v_n=2v_n-3-v_n=v_n-3$.
Donc : $v_{n+1}-v_n\leqslant -3$.

b. Pour tout entier naturel n,

$$v_n=(v_n-v_{n-1})+(v_{n-1}-v_{n-2})+\ldots+(v_1-v_0).$$

Et, comme pour tout entier k, $v_k - v_{k-1} \leqslant -3$, on a :

$$v_n \leqslant \underbrace{(-3)+(-3)+\ldots+(-3)}_{n \text{ termes}}.$$

Donc $v_n \leqslant -3n$.

c. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} -3n = -\infty$, d'après le théorème de majoration, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

Ainsi, la suite v diverge vers $-\infty$.

73 **1** $f(x)-(x+1) = \dfrac{x^2}{4} - x + 1 = \left(\dfrac{1}{2}x - 1\right)^2 \geqslant 0$.

Donc, pour tout réel x, $f(x) \geqslant x+1$.

2 D'après **1**, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geqslant 1$. La suite u est croissante.

3 $u_n - u_0 = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-1}) + \ldots$
$+ (u_1 - u_0)$.

Donc d'après **2**, $u_n - u_0 \geqslant 1 + 1 + \ldots + 1$, soit $u_n \geqslant n+3$.

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

4 Pour que $u_n \geqslant 10^6$, il suffit que $n+3 \geqslant 10^3$, soit $n \geqslant 10^3 - 3$; on prend, par exemple, $N = 997$.

Théorème des gendarmes

74 **a.** Pour tout entier naturel n, $\dfrac{-1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ d'après le théorème des gendarmes.

b. Pour tout entier naturel n non nul, $-1 \leqslant \cos n \leqslant 1$, on a $\dfrac{-1}{n^2} \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ d'après le théorème des gendarmes.

75 **1** La suite de terme général $v_k = \dfrac{1}{n+\sqrt{k}}$ est décroissante. Donc $\dfrac{1}{n+\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{n+\sqrt{k}} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

On en déduit que :

$$\frac{n}{n+\sqrt{n}} \leqslant u_n \leqslant \frac{n}{n+1}.$$

2 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}} = 1$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}} = 1$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ d'après le théorème des gendarmes.

76 **1** Pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$u_n - 3 = \frac{3n+(-1)^n\cos(n)}{n-1} - 3$$

$$= \frac{3n+(-1)^n\cos(n) - 3n + 3}{n-1} = \frac{3+(-1)^n\cos(n)}{n-1}.$$

2 Pour tout entier $n \geqslant 2$:

$-1 \leqslant (-1)^n\cos(n) \leqslant 1$, donc $2 \leqslant 3 + (-1)^n\cos(n) \leqslant 4$.

Comme $n-1 \geqslant 1$, on obtient :

$$\frac{2}{n-1} \leqslant u_n - 3 \leqslant \frac{4}{n-1}.$$

On en déduit que $|u_n - 3| \leqslant \dfrac{4}{n-1}$.

Avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{n-1} = 0$, par le théorème des gendarmes, on obtient que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - 3| = 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

3 Pour que $|u_n - 3| \leqslant 0{,}01$, il **suffit** que $\dfrac{4}{n-1} \leqslant 0{,}01$, c'est-à-dire que $n \geqslant 401$.

À partir du rang $N = 401$, on est sûr que la distance entre u_n et 3 est inférieure à 0,01.

77 **1** $u_{10} \approx 1{,}9964$ et $u_{100} \approx 2$.

La suite u semble converger vers 2.

2 Pour tout entier naturel n, $-3 \leqslant -3\sin n \leqslant 3$. On en déduit que, pour tout entier naturel non nul n :

$$\frac{2n^2-3}{n^2+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{2n^2+3}{n^2+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2-3}{n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2}{n^2} = 2.$$

De même,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2+3}{n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2}{n^2} = 2.$$

On en déduit que la suite u converge vers 2 en utilisant le théorème des gendarmes.

3 **a.** D'après **2**, pour tout entier n :

$$\frac{-5}{n^2+1} \leqslant u_n - 2 \leqslant \frac{1}{n^2+1}.$$

b. On a donc $|u_n - 2| \leqslant \dfrac{5}{n^2+1}$.

Pour que la distance entre u_n et 2 soit inférieure à 10^{-3}, il suffit que $\dfrac{5}{n^2+1} \leqslant 10^{-3}$, soit $n \geqslant 71$.

c. Non, $u_{74} \approx 2{,}0002$.

4 Convergence de certaines suites

78 **1** Vrai. **2** Faux. **3** Vrai.

79 **1** Vrai. **2** Vrai. **3** Faux. **4** Vrai.

Cas des suites monotones

80 **1** La fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ et la fonction $x \mapsto 1+x$ ont même sens de variations sur l'intervalle $[-1\,;+\infty[$. Donc la fonction f est croissante sur $[-1\,;+\infty[$.

2 *Remarque* : l'équation $f(x) = x$ admet bien une unique solution, car :

$f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{1+x} = x \Leftrightarrow 1 + x = x^2$ et $x \geqslant 0$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$ et $x \geqslant 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

On sait que $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$.

La fonction f est croissante sur $[-1;+\infty[$, donc sur $[1;a]$.
Donc, pour tout réel x de $[1;a]$, $f(1) \leqslant f(x) \leqslant f(a)$.
Or, $f(1)=\sqrt{2}$, et $f(a)=a$. Donc $\sqrt{2} \leqslant f(x) \leqslant a$.
On en déduit que $1 \leqslant f(x) \leqslant a$, c'est-à-dire $f(x) \in [1;a]$.

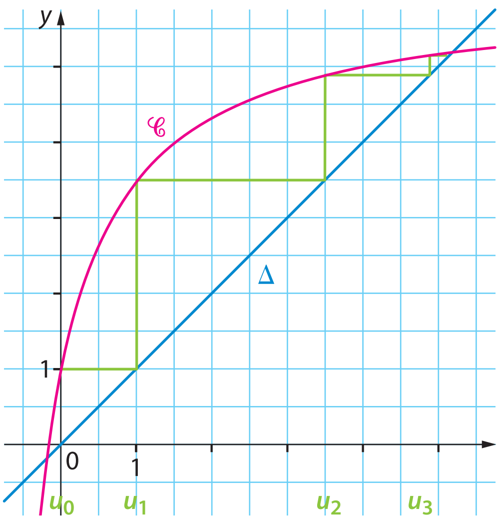
3 Pour tout entier naturel n, on note la propriété : « $1 \leqslant u_n \leqslant a$ et $u_n \leqslant u_{n+1}$ ».

- **Initialisation :** pour $n=0$, on a $u_0=1$.
Donc $1 \leqslant u_0 \leqslant a$.
Et $u_1=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$. Donc $u_0 \leqslant u_1$.
Donc $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** on suppose que pour **un** entier $n \geqslant 0$, $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire que :
$$1 \leqslant u_n \leqslant a \text{ et } u_n \leqslant u_{n+1}.$$
D'après la question **2**, $f(u_n) \in [1;a]$.
Donc $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant a$.
De plus, la fonction f est croissante sur $[1;a]$.
Donc $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$.
On en déduit $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$.
Ainsi, la propriété $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion :** par récurrence, pour tout entier $n \geqslant 0$, $P(n)$ est vraie.

Donc, pour tout entier $n \geqslant 0$, $1 \leqslant u_n \leqslant a$ et $u_n \leqslant u_{n+1}$.

4 D'après la question **3**, la suite u est croissante et majorée (par a).
Donc la suite u converge.

81 **1**



Il semble que la suite u soit croissante et converge vers un réel compris entre 5 et 6.

2 a. $f(x)=x \Leftrightarrow x^2-5x-1=0$, qui admet pour solution $\alpha=\dfrac{5+\sqrt{29}}{2}$ dans $[0;+\infty[$.

b. Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.

- **Initialisation :** $u_1=1$.
Donc $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant \alpha$.
- **Hérédité :** démontrons que si $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$ est vraie, alors :
$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \alpha.$$
La fonction f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et
$f'(x)=\dfrac{5}{(x+1)^2}$, donc f est croissante sur $[0;+\infty[$.
En utilisant l'hypothèse de récurrence,
$$f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(\alpha).$$
Comme $f(0)=1$ et $f(\alpha)=\alpha$ on a bien :
$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \alpha.$$
- **Conclusion :** pour tout entier naturel n,
$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha.$$

3 La suite u est croissante et majorée. Donc elle converge vers la solution de l'équation $f(x)=x$.
Donc sa limite ℓ est égale à α.

4 a. ALGO

```
Variables :
    e, U, L : réels ; N : entier ;
Début :
    Entrer(e) ;
    N ← 0 ;
    U ← 0 ;
    L ← (5 + √29)/2 ;
    TantQue L – U ⩾ e Faire
      N ← N + 1 ;
      U ← 6 – 5/(U + 1) ;
    FinTantQue ;
    Afficher(N) ;
Fin.
```

b. i. $N=6$; **ii.** $N=10$.

82 **1** Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$.

- **Initialisation :** $u_0=0$.
- **Hérédité :** démontrons que si $u_n \geqslant 0$, alors $u_{n+1} \geqslant 0$.
D'après l'hypothèse de récurrence, $u_n^2+3u_n+1 \geqslant 0$, donc $u_{n+1} \geqslant 0$.
- **Conclusion :** pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$:
$$u_{n+1}-u_n=u_n^2+2u_n+1 \geqslant 0.$$
Donc la suite u est croissante.

2 Si la suite u est majorée, comme elle est croissante, elle converge vers une solution de l'équation $x=x^2+3x+1 \Leftrightarrow (x+1)^2=0 \Leftrightarrow x=-1$.

3 La suite étant positive, elle ne peut pas converger vers -1.
Donc la suite u n'est pas majorée. Comme elle est croissante, elle diverge vers $+\infty$.

4 a. ALGO

```
Variables :
    A, U : réels ; N : entier ;
Début :
    Entrer(A) ;
    N ← 0 ;
    U ← 0 ;
    TantQue U ⩽ A Faire
    N ← N + 1 ;
    U ← U² + 3U + 1 ;
    FinTantQue ;
    Afficher(N) ;
Fin.
```

b. i. $N=4$; **ii.** $N=5$.

83 **1** Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant w_n \leqslant 1$.

▸ **Initialisation :** $w_0 = 0{,}6$, donc $w_0 \in [0\,;1]$.

▸ **Hérédité :** démontrons que si $0 \leqslant w_n \leqslant 1$ est vraie, alors $0 \leqslant w_{n+1} \leqslant 1$.

La fonction $f : x \longmapsto 0{,}7x + 0{,}1$ est croissante sur $\mathbb{R}$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, $f(0) \leqslant f(w_n) \leqslant f(1)$. Comme $f(0) = 0{,}1$ et $f(1) = 0{,}8$, on a bien $0 \leqslant w_{n+1} \leqslant 1$.

▸ **Conclusion :** pour tout entier naturel n, $w_{n+1} \leqslant w_n$.

2 Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $w_{n+1} \leqslant w_n$.

▸ **Initialisation :** $w_1 = 0{,}56$, donc $w_1 \leqslant w_0$.

▸ **Hérédité :** démontrons que si $0 \leqslant w_{n+1} \leqslant w_n$ est vraie, alors $0 \leqslant w_{n+2} \leqslant w_{n+1}$.

La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, $f(w_{n+1}) \leqslant f(w_n)$.

Donc on a bien $w_{n+2} \leqslant w_{n+1}$.

▸ **Conclusion :** pour tout entier naturel n, $w_{n+1} \leqslant w_n$.

La suite w est décroissante.

3 La suite w est décroissante et minorée par 0. Donc elle converge vers une solution de l'équation $f(x) = x$, qui est ici $\frac{1}{3}$.

Limite d'une suite géométrique

84 **a.** La suite de terme général $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$. Donc elle converge vers 0.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$ (opération sur les limites).

b. $v_n = 7^n\left(\left(\frac{6}{7}\right)^n - 1\right)$. La suite de terme général $\left(\frac{6}{7}\right)^n$ est une suite géométrique de raison $\frac{6}{7}$, donc elle converge vers 0 ; la suite de terme général 7^n est géométrique de raison 7, donc elle diverge vers $+\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ (opération sur les limites).

85 **a.** Pour tout entier naturel n,

$$u_n = \frac{5^{n+3}}{8^n} = 5^3 \times \left(\frac{5}{8}\right)^n.$$

Or, $\left|\frac{5}{8}\right| < 1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{8}\right)^n = 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

b. On factorise par les termes dominants au numérateur et au dénominateur. Pour tout entier naturel n :

$$v_n = \frac{4^n \times \left(\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1\right)}{3^n \times \left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)} = \left(\frac{4}{3}\right)^n \times \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}.$$

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$

et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$.

Par produit et quotient, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty.$$

86 **a.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et la suite de terme général $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$, donc elle converge vers 0. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ (opération sur les limites).

b. $v_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$ est le terme général d'une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$, donc convergeant vers 0.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

87 Démontrons par récurrence pour tout entier $n \geqslant 1$ que : pour tout entier non nul $k \leqslant n$, $u_k = 2 \times 3^k - 2^k$.

▸ **Initialisation :**

$u_1 = 2 \times 3^1 - 2^1 = 4$ et $u_2 = 2 \times 3^2 - 2^2 = 14$ vérifiées.

▸ **Hérédité :** soit un entier $n \geqslant 2$. Démontrons que si pour tout entier k, $1 \leqslant k \leqslant n$, on a $u_k = 2 \times 3^k - 2^k$, alors $u_{n+1} = 2 \times 3^{n+1} - 2^{n+1}$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :

$$u_{n+1} = 5(2 \times 3^n - 2^n) - 6(2 \times 3^{n-1} - 2^{n-1}).$$

Donc : $u_{n+1} = 10 \times 3^n - 5 \times 2^n - 4 \times 3^n + 3 \times 2^n$.

Donc : $u_{n+1} = 6 \times 3^n - 2 \times 2^n = 2 \times 3^{n+1} - 2^{n+1}$.

▸ **Conclusion :** pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$u_n = 2 \times 3^n - 2^n$$

$$u_n = 2 \times 3^n\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right).$$

La suite de terme général $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ qui converge vers 0. La suite de terme général $(3)^n$ est une suite géométrique de raison qui diverge vers $+\infty$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

88 Il s'agit de calculer la limite de la suite de terme général $s_n = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{2}{3} + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$, c'est-à-dire la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

Donc : $$s_n = \frac{\pi}{2}\,\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 3\frac{\pi}{2} - 3\frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}.$$

Toute suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ converge vers 0.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \frac{3\pi}{2}$. Le ressort a pour longueur $\frac{3\pi}{2}$ cm.

89 **1** La suite de terme général $u_k = \frac{1}{10^k}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{10}$. Donc :

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{n+2}}{1 - \frac{1}{10}} - 1 - \frac{1}{10} = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right).$$

2 $v_n = 1{,}2 + 7\left(\sum\limits_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k}\right)$, donc :

$v_n = 1{,}2 + \frac{7}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1{,}2 + \frac{7}{90}$.

Soit $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1{,}2 + \frac{7}{90} = \frac{115}{90}$.

Prépa Bac

Exercices guidés

90 **1** Vrai. Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Initialisation : $u_0 = \dfrac{0}{1} = 0$ vraie.

Hérédité : démontrons que si $u_n = \dfrac{n}{n+1}$, alors $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+2}$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :

$$u_{n+1} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}.$$

Donc $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+2}$.

Conclusion : par récurrence, pour tout entier naturel n,

$$u_n = \frac{n}{n+1}.$$

2 Faux. Pour tout entier naturel n non nul :

$$S_n = \frac{1}{n^2}(1+2+\ldots+n) = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

La suite de terme général $\dfrac{1}{2n}$ est décroissante et elle converge vers $\dfrac{1}{2}$, car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n} = 0$.

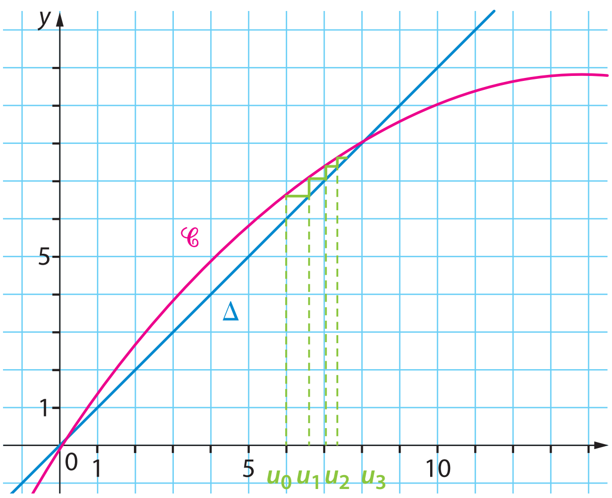
3 Vrai. Pour tout entier naturel n, $0 \leqslant 1 + (-1)^n \sin n \leqslant 2$, donc $0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{2}{n+1} \leqslant 2$. La suite v est bornée par 0 et 2, et elle converge vers 0 d'après le théorème des gendarmes.

91 **1** **a.** Pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;14]$, $f'(x) = 1{,}4 - 0{,}1x \geqslant 0$. Donc la fonction f est croissante sur $[0\,;14]$.

b. Sur $[0\,;14]$, $f(x) = x \Leftrightarrow x(0{,}4 - 0{,}05x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 8$.

c. La fonction f est croissante sur $[0\,;14]$. Si $0 \leqslant x \leqslant 8$, alors $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(8)$, soit $f(x) \in [0\,;8]$.
De même, si x appartient à l'intervalle $[8\,;14]$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[8\,;14]$.

2 **a.**



On peut conjecturer que la suite u est croissante et semble converger vers 8.

b. Démontrons par récurrence, que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 8$.

Initialisation : $u_0 = 6$ et $u_1 = 6{,}6$, donc $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 8$.

Hérédité : démontrons que si $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 8$, alors $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 8$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 8$ et comme f est croissante sur $[0\,;8]$, on a :

$$f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(8)\,;$$

donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 8$.

Conclusion : par récurrence, pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 8.$$

La suite u est donc croissante et majorée par 8.

c. La suite u est croissante et majorée par 8. Donc elle converge vers une solution de l'équation $f(x) = x$, c'est-à-dire 0 ou 8. Or, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant u_0$, soit $u_n \geqslant 6$.
Donc la suite u converge vers 8.

3 On a $f(8) = 8$.

- Si $u_0 \in \,]0\,;8[$, la suite u est croissante et converge vers 8 comme vu ci-dessus.
- Si $u_0 \in \,]8\,;14]$, la suite u est décroissante à partir du deuxième terme et converge vers 8.
- Si $u_0 = 8$, la suite u est stationnaire à 8.
- Si $u_0 = 0$, la suite u est stationnaire à 0.

92 **1** **a.** Pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{1}{5}u_n - \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \times v_n.$$

Donc la suite v est géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$ et de terme initial $v_0 = u_0 - 1 = 12$.

b. Pour tout entier naturel n, $v_n = 12 \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$. Donc :

$$u_n = 1 + v_n = 1 + 12 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n.$$

Comme $0 < \dfrac{1}{5} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

2 **a.** Pour tout entier naturel n,

$$S_{n+1} - S_n = (u_0 + \ldots + u_n + u_{n+1} - (n+1) - 1)$$
$$-(u_0 + \ldots + u_n - n - 1) = u_{n+1} - 1 = 12 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}.$$

Donc $S_{n+1} - S_n > 0$. La suite S est croissante.

b. D'après la question **2 a.**, $S_1 - S_0 = 12 \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^1$, $S_2 - S_1 = 12 \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^2, \ldots, S_n - S_{n-1} = 12 \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$.

En sommant ces égalités, on obtient :

$$S_n - S_0 = 12 \times \left(\frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$$
$$= 12 \times \frac{1}{5} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 - \frac{1}{5}} = 3\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right).$$

Comme $S_0 = u_0 - 1 = 12$, on a :

$$S_n = S_0 + 3 - 3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n = 15 - 3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n.$$

c. Comme $0 < \frac{1}{5} < 1$, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 15$.

3 a. L'algorithme donné est erroné. De proche en proche, on calcule la somme des termes u_n, puis le terme S_n, jusqu'à ce que la distance entre S_n et 15 soit inférieure à 10^{-3}.

ALGO

```
Variables :
    N : entier ;
    U , Somme , S : réels ;
Début :
    N ← 0 ;
    U ← 13 ;
    Somme ← U ;
    S ← Somme – N – 1 ;
    TantQue |S − 15| > 10^-3 Faire
      N ← N + 1 ;
      U ← U / 5 + 4/5 ;
      Somme ← Somme + U ;
      S ← Somme – N – 1 ;
    FinTantQue ;
    Afficher (N) ;
Fin.
```

b. Il s'agit de rajouter l'instruction : « Entrer (e) ; » et de modifier la condition dans la boucle TantQue : « TantQue $|S-15| > e$ Faire ».

c. i. $N = 4$; **ii.** $N = 8$.

Exercices d'entraînement

93 **1** Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = u_n{}^2 \geqslant 0$.
La suite u est croissante.

2 a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = 2x + 1$. Doù le tableau de variations :

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$h(x)$	$+\infty$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$+\infty$

On en déduit que, pour tout x appartenant à $]-1;0[$, le nombre $h(x)$ appartient aussi à $]-1;0[$.

b. Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $-1 < u_n < 0$.

- **Initialisation :** $u_0 = a$ et $a \in]-1;0[$.
- **Hérédité :** démontrons que si $-1 \leqslant u_n \leqslant 0$, alors $-1 < u_{n+1} < 0$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a $u_n \in]-1;0[$ et en utilisant la question **2 a.** on a : $h(u_n) \in]-1;0[$, donc $-1 < u_{n+1} < 0$.

- **Conclusion :** pour tout entier naturel n, $-1 < u_n < 0$.

3 La suite u est croissante et majorée par 0, donc elle converge vers une solution de l'équation $h(x) = x$, soit $x^2 = 0$, c'est-à-dire 0.

4 a. Voir ci-après l'algorithme complété.

b. Modifier les lignes :
Variables :
N : entier ; a, $\boldsymbol{e}$, u réels ;
Entrer(e) ;
TantQue $|u| \geqslant \boldsymbol{e}$.

ALGO

```
Variables :
    N : entier ; a ,u réels ;
Début :
    Entrer (a) ;
    N ← 0 ; u ← a ;
    TantQue |u| ⩾ 0,01 Faire
    N ← N + 1 ;
    u ← u² + u ;
    FinTantQue
    Afficher (N) ;
Fin.
```

c. i. $N = 99\,987$. **ii.** $N = 99\,985$.

94 **1** $10w_{10} = (10+1)w_9 + 1 = 11 \times 19 + 1 = 210$, donc $w_{10} = 21$.

2 Il semble que la suite w soit une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme 1.
Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $w_n = 1 + 2n$.

- **Initialisation :** $1 + 2 \times 0 = 1 = w_0$.
- **Hérédité :** démontrons que si $w_n = 1 + 2n$, alors $w_{n+1} = 1 + 2(n+1)$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :
$(n+1)w_{n+1} = (n+2)(1+2n) + 1 = 2n^2 + 5n + 3$
et $(n+1)w_{n+1} = (n+1)(2n+3)$, soit $w_{n+1} = 2n + 3$.

- **Conclusion :** pour tout entier naturel n, $w_n = 1 + 2n$.

$w_{2012} = 4\,025$.

95 **Partie A**

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, pour tout réel A, il existe un rang N tel que pour tout entier $n \geqslant N$, $u_n \in]A;+\infty[$.
Comme pour tout entier n, $u_n \leqslant v_n$ pour tout réel A, il existe un rang N tel que pour tout entier $n \geqslant N$, $v_n \in]A;+\infty[$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

Partie B

1 $u_1 = -\frac{5}{3}$; $u_2 = -\frac{14}{9}$; $u_3 = -\frac{14}{27}$.

2 a. Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 0$.

- **Initialisation :** $u_4 = \frac{1}{3}u_3 + 3 - 2 = \frac{67}{81} \geqslant 0$.
- **Hérédité :** démontrons que pour $n \geqslant 4$, si $u_n \geqslant 0$, alors $u_{n+1} \geqslant 0$.

Comme $n \geqslant 4$, $n - 2 > 0$ et en utilisant l'hypothèse de récurrence, on a $u_{n+1} \geqslant 0$.

- **Conclusion :** pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 0$.

b. Comme $n \geqslant 5$, $u_n \geqslant 0$, donc $u_{n+1} \geqslant n - 2 \geqslant n - 3$.

c. $\lim\limits_{n \to +\infty} n - 3 = +\infty$. Donc, d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

3 a. $v_{n+1} = -2u_{n+1} + 3(n+1) - \frac{21}{2}$, soit :

$$v_{n+1} = -2\left(\frac{1}{3}u_n + n - 2\right) + 3(n+1) - \frac{21}{2}.$$

$$v_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n + n - \frac{7}{2}.$$

Donc, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$.

La suite v est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = -\frac{25}{2}$.

b. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = -\frac{25}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

et comme $u_n = -\frac{1}{2}v_n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$, donc :

$$u_n = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}.$$

c. Comme $\frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ est le terme général d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ elle converge vers 0.

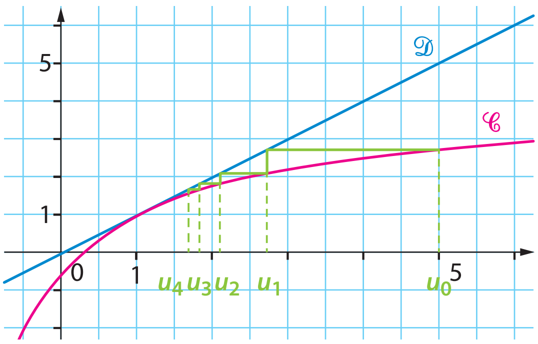
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{2}n - \frac{21}{4} = +\infty$.

4 Pour tout entier $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 0$ et $u_n \geqslant n-3$. Donc :

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n \geqslant u_0 + \ldots + u_4 + n - 3.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ en utilisant le théorème de comparaison.

96 **1 a.**



b. Il semble que la suite u soit décroissante et converge vers 1.

2 a. Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$.

Initialisation : $u_0 = 5$, donc $u_0 \geqslant 1$.

Hérédité : démontrons que si $u_n \geqslant 1$, alors $u_{n+1} \geqslant 1$.
La fonction f est dérivable sur $]-2\,;+\infty[$ et
$f'(x) = \frac{9}{(x+2)^2} > 0$. Donc la fonction f est une fonction croissante sur $]-2\,;+\infty[$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a $u_n \geqslant 1$ et comme f est croissante sur $]-2\,;+\infty[$ on a $f(u_n) \geqslant f(1)$.
Comme $f(1) = 1$, on a $u_{n+1} \geqslant 1$.

Conclusion : pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$.

b. Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n-1)^2}{u_n+2} \leqslant 0$$

d'après la question précédente.
Donc la suite u est décroissante.

c. La suite u est décroissante et minorée par 1. Donc la suite u converge vers un réel ℓ, solution de l'équation $f(x) = x$, c'est-à-dire $\ell = 1$.

3 a. Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}-1} - \frac{1}{u_n - 1}$$
$$= \frac{u_n+2}{3(u_n-1)} - \frac{1}{u_n-1} = \frac{1}{3}.$$

Donc la suite v est arithmétique de raison $\frac{1}{3}$ et de terme initial $v_0 = \frac{1}{u_0 - 1} = \frac{1}{4}$.

b. Pour tout entier naturel n, $v_n = \frac{1}{4} + \frac{n}{3}$.

Donc $u_n = 1 + \frac{1}{v_n} = 1 + \frac{12}{3+4n}$.

c. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{12}{3+4n} = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

97 **Partie A**

a. La suite u est croissante, donc pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a $u_n \geqslant u_{n_0}$.

b. D'après la définition, l'intervalle ouvert $]\ell - 1\,; u_{n_0}[$ contient ℓ, donc il existe un rang N tel que pour tout entier $n \geqslant N$, on a $u_n \in]\ell-1\,; u_{n_0}[$.

c. D'après **b.**, si $n \geqslant \sup(N, n_0)$, $u_n < u_{n_0}$ ce qui contredit la question **a.**. Donc la suite u est majorée par ℓ.

Partie B

1 a. La fonction f définie est dérivable sur $[0\,;20]$ et $f'(x) = \frac{1}{5}(10-x)$, d'où le tableau de variations :

x	0	10	20
$f(x)$	0 ↗	10	↘ 0

b. D'après le tableau ci-dessus pour tout $x \in [0\,;20]$, $f(x) \in [0\,;10]$.

2 • Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$.

Initialisation : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1{,}9$, donc :

$$0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 10.$$

Hérédité : démontrons que si $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$, alors $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 10$.
La fonction f est croissante sur $[0\,;10]$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :

$$f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(10)$$

et comme $f(0) = 0$ et $f(10) = 10$, on en déduit que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 10$.

Conclusion : pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10.$$

3 La suite u est croissante et majorée par 10. Donc elle est convergente vers une solution de l'équation $f(x) = x$. Donc elle converge vers 10.

4 D'après cette modélisation, le nombre de foyers français possédant un téléviseur à écran plat ne dépassera pas 10 millions.

98 **Partie A**

1 P_1 : Faux ; P_2 : faux ; P_3 : vrai ; P_4 : vrai.

2 La propriété P_3 est la négation de la proposition P_1.

Partie B

1 Soit un entier $p \geqslant 1$.

a. $4(p+1) + 1 - 4(4p+1) = 1 - 12p$.

b. Si $p \geqslant 1$, alors $1 - 12p < 0$.
Donc $4(4p+1) > 4(p+1) + 1$.

2 Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel $n > 1$, $4^n > 4n + 1$.

▶ **Initialisation :** $4^2 > 4 \times 2 + 1$ est vraie.

▶ **Hérédité :** démontrons que si $4^n > 4n + 1$, alors $4^{n+1} > 4(n+1) + 1$;

$4^{n+1} = 4 \times 4^n$, donc en utilisant l'hypothèse de récurrence, $4^{n+1} > 4 \times (4n+1) \geqslant 4(n+1) + 1$ d'après la question **1 b.**.

▶ **Conclusion :** pour tout entier naturel, $n > 1$,

$$4^n > 4n + 1.$$

• Pour $n = 0$: $4^0 = 1$ et $4 \times 0 + 1 = 1$.

• Pour $n = 1$: $4^1 = 4$ et $4 \times 1 + 1 = 5$.

99 **1** La fonction f est dérivable sur $[0\,;1]$ et $f'(x) = \dfrac{10}{(x+4)^2} > 0$, d'où le tableau des variations de f :

x	0	1
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$ ↗	1

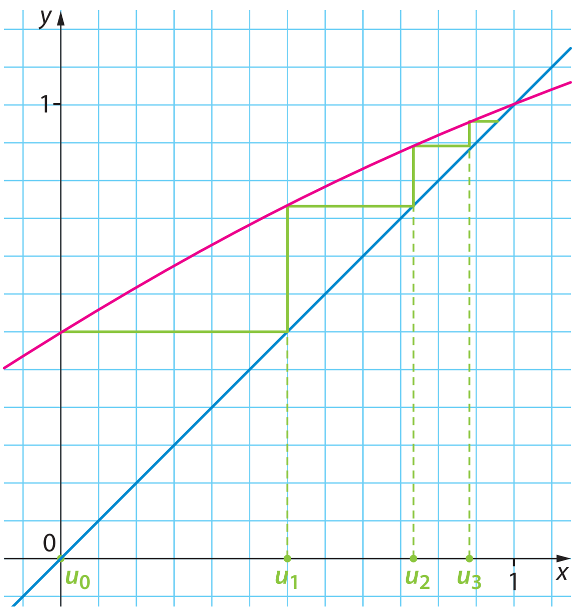
2 Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \in \mathrm{I}$.

▶ **Initialisation :** $u_0 = 0$, donc $u_0 \in \mathrm{I}$.

▶ **Hérédité :** démontrons que si $u_n \in \mathrm{I}$, alors $u_{n+1} \in \mathrm{I}$.
En utilisant l'hypothèse de récurrence, $u_n \in \mathrm{I}$ et le tableau de variations ci-dessus, $f(u_n) \in \mathrm{I}$. Donc $u_{n+1} \in \mathrm{I}$.

▶ **Conclusion :** pour tout entier naturel n, $u_n \in \mathrm{I}$.

3 a.



b. Il semble que la suite u soit croissante et convergente vers 2.

c. Pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}.$$

Comme $u_n \in I$, on a $1 - u_n \geqslant 0$ et $u_n + 2 \geqslant 0$. Donc, pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. La suite u est croissante.

d. La suite u est croissante et majorée par 1, donc elle converge vers une solution de l'équation $f(x) = x$.

$\dfrac{3x+2}{x+4} = x \Leftrightarrow (1-x)(x+2) = 0$.

Les solutions sont 1 et -2.

La suite u étant positive, elle converge vers 1.

4 a. Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} = \frac{\dfrac{3u_n + 2}{u_n + 4} - 1}{\dfrac{3u_n + 2}{u_n + 4} + 2} = \frac{2u_n - 2}{5u_n + 10}.$$

Donc $v_{n+1} = \dfrac{2}{5} v_n$.

La suite v est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$.

b. $v_0 = -\dfrac{1}{2}$. Donc $v_n = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.

c. Pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{2v_n + 1}{1 - v_n}$.

Donc : $$u_n = \frac{1 - \left(\dfrac{2}{5}\right)^n}{1 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}.$$

d. La suite v est géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$, donc elle converge vers 0. La suite u converge donc vers 1 (opérations sur les limites).

100 **Partie 1**

1 On peut compléter un tableau de suivi des variables :

Étapes	n	u	S	i
Initialisation	3	1	1	0
Boucle « Tant Que »				
$0 < 3$		$2 \times 1 + 1 - 0 = 3$	$1 + 3 = 4$	$0 + 1 = 1$
$1 < 3$		$2 \times 3 + 1 - 1 = 6$	$4 + 6 = 10$	$1 + 1 = 2$
$2 < 3$		$2 \times 6 + 1 - 2 = 11$	$10 + 11 = 21$	$2 + 1 = 3$
Fin de la boucle « Tant Que »				
Affichage : $u = 11$ et $S = 21$.				

2

Valeur de n	0	1	2	3	4	5
Affichage de u	1	3	6	11	20	37
Affichage de S	1	4	10	21	41	78

Partie 2

1 Elles représentent les valeurs successives de u_n et S_n.

2 a. Recopier et compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5
u_n	1	3	6	11	20	37
$u_n - n$	1	2	4	8	16	32

On peut conjecturer que $u_n - n = 2^n$.

b. Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 2^n + n$.

▶ **Initialisation :** $u_0 = 2^0 + 0 = 1$ vraie.

▶ **Hérédité :** démontrons que, si $u_n = 2^n + n$, alors $u_{n+1} = 2^{n+1} + n + 1$.

$u_{n+1} = 2u_n + 1 - n$. Donc, en utilisant l'hypothèse de récurrence, $u_{n+1} = 2(2^n + n) + 1 - n$; donc $u_{n+1} = 2^{n+1} + 2n + 1 - n$, soit $u_{n+1} = 2^{n+1} + n + 1$.

▶ **Conclusion :** pour tout entier naturel n, $u_n = 2^n + n$.

3 $S_n = (2^0 + 0) + (2^1 + 1) + \ldots + (2^n + n)$

$S_n = (1 + 2^1 + \ldots + 2^n) + (1 + 2 + \ldots + n)$.

Donc :

$$S_n = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} + \frac{n(n+1)}{2} = 2^{n+1} - 1 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Vérification : $S_5 = 2^6 - 1 + \frac{5 \times 6}{2} = 78$.

101 **Partie A**

Soit un réel q. Si $q \in]0\,;1[$, alors $\frac{1}{q} > 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{q}\right)^n = +\infty$. Donc, comme $q^n = \frac{1}{\left(\frac{1}{q}\right)^n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ en utilisant les opérations sur les limites.

Partie B

1 a. Pour $n = 5$ on obtient $u = 5\,000 \times 0{,}8^5 = 1638{,}4$.

b. Modification :

Pour i allant de 1 à n faire $u \leftarrow 0{,}8u + 1500$; FinPour

c. La suite u semble croissante et converger vers 7 500.

2 a. Pour tout entier naturel n,

$v_{n+1} = u_{n+1} - 7\,500 = 0{,}8u_n + 1500 - 7\,500$
$= 0{,}8(u_n - 7\,500) = 0{,}8v_n$.

La suite v est une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme $v_0 = -2\,500$.

b. Pour tout entier naturel n, $v_n = -2\,500 \times 0{,}8^n$.

Donc $u_n = v_n + 7\,500 = 7\,500 - 2\,500 \times 0{,}8^n$.

3 • $u_{n+1} - u_n = 2\,500 \times 0{,}8^n \times 0{,}2 > 0$.

Donc la suite u est croissante.

• $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}8^n = 0$ (suite géométrique de raison qui en valeur absolue est strictement inférieure à 1).

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 7\,500$.

4 a. On calcule u_n de proche en proche, jusqu'à ce que la distance à 7 500 soit inférieure à 0,1.

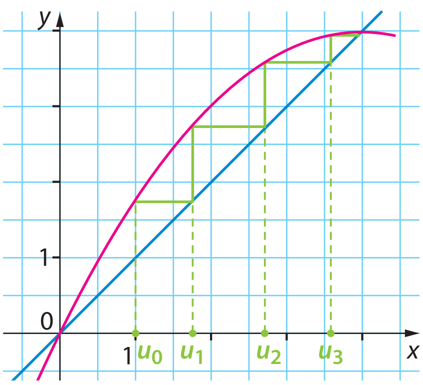
b. Algorithme modifié.

ALGO

```
Variables :
  N : entier ; u ; e réels ;
Début :
  N ← 0 ; u ← 5 000 ;
  Entrer(e) ;
  TantQue 7 500 − u ⩾ e Faire
    N ← N + 1 ;
    u ← 0,8 u + 1 500 ;
  FinTantQue
  Afficher (N) ;
Fin.
```

c. i. $N = 36$; **ii.** $N = 46$.

102 **1 a. b.**



c. La suite u semble croissante et converger vers 4.

2 Si la suite u converge, les limites possibles sont les solutions de l'équation $2x - \frac{1}{4}x^2 = x \Leftrightarrow x(x-4) = 0$.

Les limites possibles sont 0 et 4.

3 La fonction f est croissante sur $[0\,;4]$.

Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 4$.

▸ **Initialisation :** $u_0 = 1$, donc $u_0 \in [0\,;4]$.

▸ **Hérédité :** démontrons que si $0 \leqslant u_n \leqslant 4$, alors $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

D'après l'hypothèse de récurrence, $0 \leqslant u_n \leqslant 4$ et le fait que f est croissante sur $[0\,;4]$, on a $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(4)$, soit $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

▸ **Conclusion :** pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 4$.

Pour tout entier naturel n,

$u_{n+1} - u_n = u_n\left(1 - \frac{1}{4}u_n\right) \geqslant 0$ d'après la question précédente. La suite u est donc croissante.

4 La suite u est croissante et majorée par 4, donc elle converge vers 4 d'après la question **2**.

103 **Partie A**

1 La suite u est non majorée si pour tout réel M, il existe un entier naturel n tel que $u_n \geqslant M$.

2 Soit un réel M.

a. On suppose qu'il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} \geqslant M$. Comme la suite u est croissante, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant M$.

b. On en conclut que la suite u diverge vers l'infini.

3 Si la suite u est croissante et non majorée, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Partie B

1 Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$.

▸ **Initialisation :** $u_0 = 1 \geqslant 1$.

▸ **Hérédité :** démontrons que si $u_n \geqslant 1$, alors $u_{n+1} \geqslant 1$.

Si $u_n \geqslant 1$, alors $\frac{1}{u_n} > 0$. Donc $u_{n+1} \geqslant u_n \geqslant 1$.

▸ **Conclusion :** pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$.

2 Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} \geqslant 0$.

La suite u est croissante.

3 a. Si la suite u est majorée, comme elle est croissante, elle converge.

b. La limite ℓ de la suite u est solution de l'équation $x = x + \frac{1}{x}$ par unicité de la limite d'une suite.

4 Comme l'équation précédente n'a pas de solution, la suite u ne converge pas. Donc la suite u n'est pas majorée et alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Problèmes

104 **1** Pour tout entier naturel n :

$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n - u_{n+1}$;

soit $v_{n+1} = -\frac{2}{3}(u_{n+1} - u_n) = -\frac{2}{3}v_n$.

La suite v est une suite géométrique de raison $-\frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = 1$.

2 Pour tout entier naturel n :

$w_{n+1} = u_{n+2} + \frac{2}{3}u_{n+1} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3}u_{n+1}$.

$w_{n+1} = w_n$. La suite w est constante.

3 $w_0 = 1$. Donc pour tout entier naturel n, $w_n = 1$.

4 Pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{3}{5}(w_n - v_n)$.

Comme $v_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$ et $w_n = 1$, on a :

$$u_n = \frac{3}{5}\left(1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right).$$

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{3}{5}$.

105 **1** Vrai. La fonction $f : x \longmapsto \frac{x}{1+x}$ est croissante sur $[0\,; +\infty[$ et $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$. Donc pour tout entier n, $0 \leqslant v_n \leqslant 1$.

2 Vrai. Car dans ce cas, $1 + u_n$ converge vers un réel non nul.

3 Vrai. Pour tout entier n, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
Comme f est croissante, alors $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$, c'est-à-dire $v_n \leqslant v_{n+1}$.

4 Faux. Pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{v_n}{1 - v_n}$.

Si la suite v converge vers 1, alors la suite u diverge.

106 **1** Si pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant M$, la suite u est majorée par M.

2 Si P_1 et P_5 sont vraies, alors la suite u converge.

3 Si P_2 et P_5 sont vraies, la suite u diverge vers $+\infty$.

4 Vrai.

107 **1** **a.** On propose :

ALGO

```
Variables :
   N, i : entiers ; U : réel ;
Début ;
   Entrer(N) ;
   U ← 1 ;
   Pour i allant de 2 à N faire
      U ← U×(1 − 1/i²) ;
   FinPour ;
   Afficher(U) ;
Fin.
```

b. La suite u semble décroissante et converger vers $\frac{1}{2}$.

2 **a.** Pour tout entier, on a :

$$u_{n+1} = u_n\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right),$$

donc : $$u_{n+1} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}u_n.$$

b. Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$:

$$u_n = \frac{n+1}{2n}.$$

Initialisation : $u_2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \frac{2+1}{2\times 2}$ vraie.

Hérédité : démontrons que si $u_n = \frac{n+1}{2n}$, alors $u_{n+1} = \frac{(n+1)+1}{2(n+1)}$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence :

$u_{n+1} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}u_n$, soit $u_{n+1} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \times \frac{n+1}{2n}$.

Donc : $$u_{n+1} = \frac{(n+2)}{2(n+1)}.$$

Conclusion : pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,

$$u_n = \frac{n+1}{2n}.$$

• On a pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{2n(n+1)} \leqslant 0,$$

donc la suite u est décroissante.

• $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$.

108 **1** Si $m \geqslant 83$, alors $u_m \geqslant 5$.

2 Pour tout entier naturel n non nul,

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} \geqslant 0$. Donc la suite u est croissante.

3 Pour tout entier naturel n non nul et tout entier naturel i inférieur à 2^n on a $2^n + i \leqslant 2^n + 2^n = 2^{n+1}$, donc $\frac{1}{2^{n+1}} \leqslant \frac{1}{2^n + i}$.

4 **a.** La somme S_n comporte 2^n termes, chacun étant supérieur à $\frac{1}{2^{n+1}}$ d'après la question **3**.

Donc $S_n \geqslant \frac{2^n}{2^{n+1}}$, c'est-à-dire $S_n \geqslant \frac{1}{2}$.

b. Pour $n \geqslant 1$,

$$S_0 + S_1 + \ldots + S_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^n + 1} + \ldots + \frac{1}{2^n + 2^n}\right).$$

Donc $S_0 + S_1 + \ldots + S_n = u_{2^n + 2^n} = u_{2^{n+1}}$.

c. On a : $S_0 + S_1 + \ldots + S_n \geqslant (n+1) \times \frac{1}{2}$. Donc :

$u_{2^{n+1}} \geqslant \frac{n+1}{2}$. Donc la suite u n'est pas majorée.

5 Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n+1}{2} = +\infty$, on a alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

109 **a.** Démontrons par récurrence que pour tout entier $n \geqslant k$, $\frac{k^n}{n!} \leqslant \frac{k^k}{k!}$.

Initialisation : pour $n = k$, $\frac{k^k}{k!} \leqslant \frac{k^k}{k!}$ vraie.

Hérédité : démontrons que si $\frac{k^n}{n!} \leqslant \frac{k^k}{k!}$, alors $\frac{k^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \frac{k^k}{k!}$.

On a $\frac{k^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{k^n}{n!} \times \frac{k}{n+1}$, en utilisant l'hypothèse de récurrence, $\frac{k^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \frac{k^k}{k!} \times \frac{k}{n+1} \leqslant \frac{k^k}{k!}$, car $\frac{k}{n+1} \leqslant 1$.

Conclusion : pour tout entier naturel $n \geqslant k$, $\dfrac{k^n}{n!} \leqslant \dfrac{k^k}{k!}$.

b. Pour tout entier $n \geqslant k$: $\dfrac{x^n}{n!} = \left(\dfrac{x}{k}\right)^n \times \dfrac{k^n}{n!}$ d'après la question précédente, $\dfrac{x^n}{n!} \leqslant \left(\dfrac{x}{k}\right)^n \times \dfrac{k^k}{k!}$.

c. La suite de terme général $\left(\dfrac{x}{k}\right)^n$ est géométrique de raison $\dfrac{x}{k}$ inférieure à 1 en valeur absolue.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{x}{k}\right)^n = 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{x}{k}\right)^n \times \dfrac{k^k}{k!} = 0$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$ d'après le théorème des gendarmes.

110 **1** $u_1 = 1$, $u_2 = \dfrac{1}{2}$, $u_3 = \dfrac{2}{9}$, $u_5 = \dfrac{24}{625}$,

$u_{10} = \dfrac{567}{1562\,500}$.

La suite u semble décroissante et convergente vers 0.

2 **a.** Pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{n!}{n^n} \times \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{n!}{n^n} \times \frac{(n+1)^n}{n!}$$
$$= \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Comme $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$, on a :

$\dfrac{u_n}{u_{n+1}} \geqslant 1 + n \times \dfrac{1}{n}$, c'est-à-dire $\dfrac{u_n}{u_{n+1}} \geqslant 2$.

b. La suite u est strictement positive.

Pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 2u_{n+1} \geqslant u_{n+1}$.

Donc la suite u est décroissante.

3 **a.** En remarquant que $\dfrac{u_n}{u_0} = \dfrac{u_1}{u_0} \times \dfrac{u_2}{u_1} \times \ldots \times \dfrac{u_n}{u_{n-1}}$

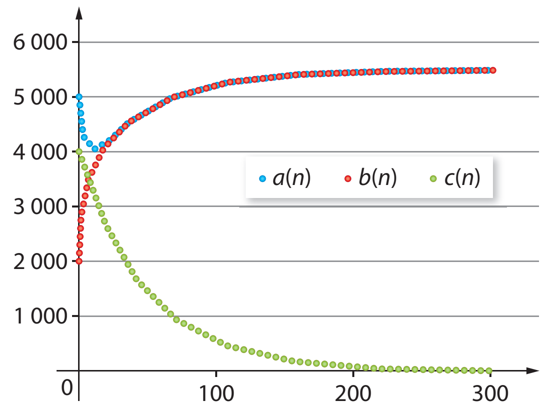
et que, pour tout entier naturel n, $0 < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{2}$, on a :

tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

b. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2^{n-1}} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

111 **1** **a.** On a $\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}9a_n + 0{,}1b_n + 0{,}01c_n \\ b_{n+1} = 0{,}9b_n + 0{,}1a_n + 0{,}01c_n \\ c_{n+1} = 0{,}98c_n \end{cases}$

b. À l'aide du tableur, on obtient :



On conjecture que la suite a est croissante à partir d'un certain rang et converge vers 5 500, que la suite b est croissante et converge vers 5 500 et que la suite c est décroissante et converge vers 0.

c. Pour tout entier naturel n :

$$d_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1} = (0{,}9a_n + 0{,}1b_n + 0{,}01c_n) - (0{,}9b_n + 0{,}1a_n + 0{,}01c_n).$$

Donc $d_{n+1} = 0{,}8(a_n - b_n) = 0{,}8d_n$. La suite d est géométrique de raison 0,8 et de premier terme 3 000.

1 **a.** Les suites c et d sont géométriques. Donc pour tout entier naturel n :

$$c_n = 4\,000 \times (0{,}98)^n \text{ et } d_n = 3\,000 \times (0{,}8)^n.$$

b. On a pour tout entier naturel n :

$$a_n + b_n + c_n = 11\,000 \text{ et } a_n = b_n + d_n.$$

Donc $b_n = 5\,500 - \dfrac{1}{2}(d_n + c_n)$, soit :

$$b_n = 5\,500 - 2\,000 \times 0{,}98^n - 1500 \times 0{,}8^n$$

et $a_n = 5\,500 - \dfrac{1}{2}(c_n - d_n)$, soit :

$$a_n = 5\,500 - 2\,000 \times 0{,}98^n + 1500 \times 0{,}8^n.$$

c. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} d_n = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 5\,500$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 5\,500$.

Cela signifie qu'au bout d'un temps assez long, les populations des zones A et B se stabilisent chacune autour de 5 500 habitants.

112 **1** On a naturellement pour tout entier naturel n non nul :

$$m_{n+1} = 3m_n \text{ et } a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n.$$

2 En prenant $a = 1$, la suite u semble converge vers 0,5. On peut conjecturer que le triangle sera entièrement recouvert.

3 Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n$ est l'aire de la surface recouverte en plus après $n+1$ étapes du processus.

$$u_{n+1} - u_n = m_{n+1} \times a_{n+1} = \frac{3}{4} m_n \times a_n.$$

D'après **1**, les suites m et a sont géométriques de raisons respectives 3 et $\dfrac{1}{4}$, donc $m_n = 3^{n-1}$ et $a_n = \dfrac{a^2}{8}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$.

Donc : $\quad u_{n+1} - u_n = \dfrac{3^n}{4^{n+1}} \times \dfrac{a^2}{2}$.

4 En « additionnant » les égalités :

$$u_2 = u_1 + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{a^2}{2}$$

$$u_3 = u_2 + \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{a^2}{2}$$

…

$$u_n = u_{n-1} + \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \times \frac{a^2}{2}.$$

On obtient $u_n = u_1 + \dfrac{a^2}{8}\left(\dfrac{3}{4} + \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}\right)$;

donc : $\quad u_n = \dfrac{a^2}{8} + \dfrac{3a^2}{8}\left(1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}\right)$.

5 La suite de terme général $\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$ inférieure à 1 en valeur absolue, donc elle converge vers 0.

On en déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{a^2}{2}$. Donc le triangle sera entièrement recouvert.

113 **1 a.** Pour tout entier naturel n,

$$T_{n+1} = \frac{18T_n + 2 \times 16}{20},$$

donc : $\quad T_{n+1} = 0{,}9T_n + 1{,}6.$

b. On calcule le terme T_n jusqu'à obtenir une valeur inférieure à 40.

ALGO

```
Variables :
  N : entier ; T : réel ;
Début :
  N ← 0 ;
  T ← 80 ;
  TantQue T ⩾ 40 Faire
    N ← N+1 ;
    T ← 0,9 × T + 1,6 ;
  FinTantQue ;
  Afficher(N) ;
Fin.
```

On obtient $N = 10$.

2 Pour tout entier naturel n, on a :

$$U_{n+1} = T_{n+1} - 16 = 0{,}9T_n + 1{,}6 - 16,$$

donc : $\quad U_{n+1} = 0{,}9(T_n - 16) = 0{,}9U_n.$

La suite U est une suite géométrique de raison 0,9 et de premier terme 64.

3 Pour tout entier naturel n, $U_n = 64 \times (0{,}9)^n$.

Donc $T_n = 16 + 64 \times (0{,}9)^n$

$$T_n < 40 \Leftrightarrow (0{,}9)^n < \frac{3}{8} \Leftrightarrow n > \frac{\ln\frac{3}{8}}{\ln 0{,}9}.$$

Or, $\dfrac{\ln\left(\frac{3}{8}\right)}{\ln(0{,}9)} \approx 9{,}3$ et n est un entier.

La température de 40 °C est atteinte au bout de 10 s.

114 **1** Si la suite u converge vers 1, tout intervalle ouvert contenant 1 contient tous les termes à partir d'un rang p.

On choisit l'intervalle $\left]\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right[$ qui contient 1. Donc à partir du rang p, $u_n \in \left]\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right[$.

Ainsi, à partir du rang p, la suite u est positive.

2 Même raisonnement avec l'intervalle $\left]\frac{\ell}{2} ; \frac{3\ell}{2}\right[$.

115 **1** $u_4 = 0{,}2357$, $u_5 = 0{,}235711$.

2 La suite u est croissante et majorée par 1, donc elle est convergente.

Prendre des initiatives

116 En utilisant un tableur, on remarque que la suite u n'est pas monotone, mais qu'elle semble converger vers 1.

n	un
1	-100
2	-99
3	-48,5
4	-15,1666667
5	-2,79166667
6	0,44166667
7	1,07361111
8	1,15337302
9	1,14417163
10	1,12713018
11	1,11271302
12	1,10115573
13	1,09176298

De plus, dès que $n \geqslant 6$, alors $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$ la propriété : pour $n \geqslant 6$, alors $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

Initialisation :

pour $n = 6$, on a $u_6 \approx 0{,}4$.

Donc $P(6)$ est vraie.

Hérédité : on suppose que pour **un** entier $n \geqslant 6$, $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire que : $0 \leqslant u_n \leqslant 2$. Démontrons que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$ est vraie.

En utilisant l'hypothèse de récurrence,

$$0 \leqslant \frac{u_n}{n} + 1 \leqslant \frac{2}{n} + 1 \leqslant 2,$$

soit $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$, c'est-à-dire que la propriété $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : par récurrence, pour tout entier $n \geqslant 6$, alors $P(n)$ est vraie.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 6$, $u_{n+1} - 1 = \frac{u_n}{n}$.

Donc, d'après ce qui précède, $0 \leqslant u_{n+1} - 1 \leqslant \frac{2}{n}$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2}{n} = 0$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - 1 = 0$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

117 On a $u_n = \dfrac{1 + 3 + \ldots + (2n+1)}{(2n+3) + (2n+5) + \ldots + (4n+3)}$.

• $1 + 3 + \ldots + (2n-1) = \dfrac{(n+1)(2n+2)}{2}$

$= (n+1)(n+1)$.

• Soit $A = (2n+3) + (2n+5) + \ldots + (4n+3)$

$A = \dfrac{(n+1)(6n+6)}{2} = (n+1)(3n+3)$.

Donc $u_n = \dfrac{(n+1)(n+1)}{(n+1)(3n+3)} = \dfrac{1}{3}$.

La suite u est constante égale à $\frac{1}{3}$.

118 Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $w_n = nu_n$.

Comme $u_{n+1} = \dfrac{nu_n + 4}{n+1}$, on a $(n+1)u_{n+1} = nu_n + 4$,

donc $w_{n+1} = w_n + 4$.

La suite w est arithmétique de raison 4 et de premier terme $w_0 = 1$.

Donc pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$w_n = 1 + 4(n-1) = 4n - 3.$$

On en déduit que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{4n-3}{n}$.

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{4n}{n} = 4$.

Pistes pour l'accompagnement personnalisé

Revoir les outils de base

119 **a.** Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 7 > 0$.
Donc la suite u est croissante.
b. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 2n + 4 \geqslant 0$.
Donc la suite u est croissante.
c. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leqslant 0$.
Donc la suite u est décroissante.
d. $u_0 = 4$, $u_1 = 3$ et donc la suite u n'est pas croissante.

120 **a.** Faux. $u_5 = 5$ et $u_6 = 9$.
b. Vrai. **c.** Faux. **d.** Vrai.

Les savoir-faire du chapitre

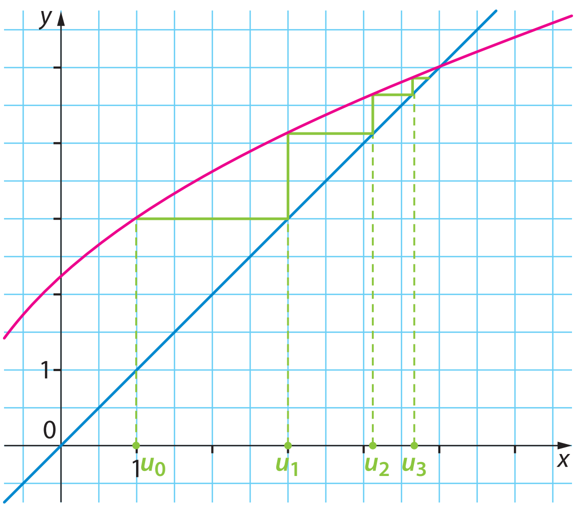
121 Démontrons par récurrence, que pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{7}{11}$.

Initialisation : $u_0 = \frac{7}{11}$, vrai.

Hérédité : démontrons que si $u_n = \frac{7}{11}$, alors :
$$u_{n+1} = \frac{7}{11}.$$
On a $u_{n+1} = 100u_n - 63$, donc :
$$u_{n+1} = 100 \times \frac{7}{11} - 63 = \frac{700 - 693}{11} = \frac{7}{11}.$$

Conclusion : pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{7}{11}$.
La suite u est stationnaire.

122



Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant 5$.

Initialisation : $u_0 = 1$, donc $1 \leqslant u_0 \leqslant 5$.

Hérédité : démontrons que si $1 \leqslant u_n \leqslant 5$, alors $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 5$.
La fonction $f : x \longmapsto \sqrt{4x+5}$ est croissante sur $\left]-\frac{5}{4}\,;+\infty\right[$, car de même sens de variation que la fonction $x \longmapsto 4x + 5$ (fonction affine de coefficient directeur positif). En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a $1 \leqslant u_n \leqslant 5$ et comme f est croissante sur $\left]-\frac{5}{4}\,;+\infty\right[$, on a $f(1) \leqslant f(u_n) \leqslant f(5)$, soit $3 \leqslant u_{n+1} \leqslant 5$. Donc $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 5$.

Conclusion : pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant 5$.
La suite u est bornée.

123 **a.** On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ (suite géométrique de raison inférieure à 1 en valeur absolue) et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{3n} = 0$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

c. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-n^2}{n^2} = -1$.

d. $t_n = 6^n - 9^n = 9^n\left(\left(\frac{6}{9}\right)^n - 1\right)$. Donc en utilisant le théorème sur la convergence des suites géométriques, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 9^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{6}{9}\right)^n = 0$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = +\infty$.

124 **1** La suite u semble croissante et converger vers 2.
2 Pour tout entier naturel n :
$$v_{n+1} = (u_{n+1})^2 - 4 = \frac{1}{4}((u_n)^2 + 12) - 4$$
$$= \frac{1}{4}(u_n)^2 - 1 = \frac{1}{4}v_n.$$
Donc la suite v est géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme -4.
3 La suite v converge vers 0 (sa raison est en valeur absolue inférieure strictement à 1). Comme $u_n = \sqrt{v_n + 4}$, la suite u converge vers 2 (composée de suites).

125 **1** Vrai. **2** Faux. **3** Faux. **4** Vrai.

126 **1** Faux. **1** Vrai. **3** Vrai. **4** Faux.

127 **Partie A**
1 On doit avoir : $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC}$, donc $\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$, soit :
$$x^2 - x - 1 = 0.$$
2 Cette équation admet deux solutions $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Donc le nombre d'or est $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
3
$$1 + \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{(3+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}$$
$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi.$$

Partie B

1 Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n :
$P(n)$: « pour tout entier naturel $k \leqslant n$, $a_k \geqslant 1$ ».

- **Initialisation :** $a_0 = 1$, $a_1 = 1$; vrai.
- **Hérédité :** soit un entier $n \geqslant 1$; démontrons que si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire $a_{n+1} \geqslant 1$.
On a $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, $a_{n+1} \geqslant 1 + 1 \geqslant 2 \geqslant 1$.
- **Conclusion :** pour tout entier naturel n, $a_n \geqslant 1$.

2 • $u_0 = \dfrac{a_1}{a_0} = 1$.

• $u_{n+1} = \dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \dfrac{a_{n+1} + a_n}{a_{n+1}} = 1 + \dfrac{a_n}{a_{n+1}}$.

Donc pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.

3 Si la suite u converge, alors elle converge vers ℓ solution de l'équation $x = 1 + \dfrac{1}{x}$, soit $x^2 - x - 1 = 0$.
Comme ℓ doit être positive, $\ell = \varphi$.

4 **a.** On a $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$ et $\varphi = 1 + \dfrac{1}{\varphi}$. On soustrait membre à membre, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - \varphi = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\varphi} = \frac{\varphi - u_n}{\varphi u_n}.$$

b. Pour tout entier naturel n :

$$|u_{n+1} - \varphi| = \frac{1}{\varphi} \frac{|u_n - \varphi|}{u_n}.$$

Comme $u_n \geqslant 1$, on obtient $|u_{n+1} - \varphi| \leqslant \dfrac{|u_n - \varphi|}{\varphi}$.

c. Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $|u_n - \varphi| \leqslant \left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^n |1 - \varphi|$.

- **Initialisation :** $\left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^0 |1 - \varphi| = |1 - \varphi| = |u_0 - \varphi|$.
- **Hérédité :** démontrons que si :

$$|u_n - \varphi| \leqslant \left(\frac{1}{\varphi}\right)^n |1 - \varphi|, \text{ alors :}$$

$$|u_{n+1} - \varphi| \leqslant \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{n+1} |1 - \varphi|.$$

On a $|u_{n+1} - \varphi| = \dfrac{|u_n - \varphi|}{\varphi}$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a $|u_{n+1} - \varphi| \leqslant \dfrac{1}{\varphi}\left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^{n+1} |1 - \varphi|$.

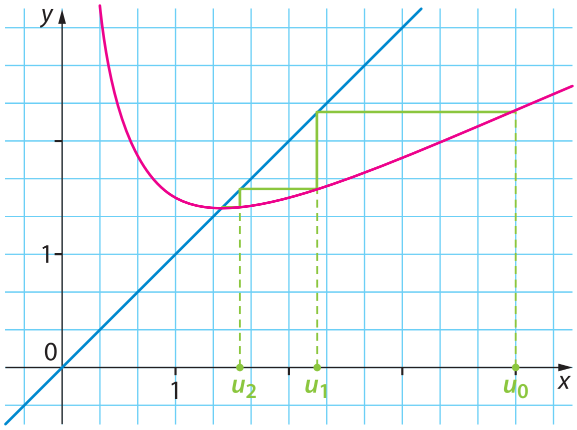
Donc $|u_{n+1} - \varphi| \leqslant \left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^{n+1} |1 - \varphi|$.

- **Conclusion :** pour tout entier naturel n,

$$|u_n - \varphi| \leqslant \left(\frac{1}{\varphi}\right)^n |1 - \varphi|.$$

d. La suite de terme général $\left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^n$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{\varphi}$ strictement inférieure à 1 en valeur absolue, donc elle converge vers 0, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \varphi| = 0$.
Donc la suite u converge vers φ.

128 **1** En prenant $u_0 = 4$:



La suite u semble être décroissante et converger vers 1,4.

2 Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \sqrt{2}$.

- **Initialisation :** $u_1 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\ell^2 + 2}{\ell}$;

donc $u_1 - \sqrt{2} \geqslant \dfrac{(\ell - \sqrt{2})^2}{2\ell} \geqslant 0$. Donc $u_1 \geqslant \sqrt{2}$.

- **Hérédité :** démontrons que si $u_n \geqslant \sqrt{2}$, alors $u_{n+1} \geqslant \sqrt{2}$.
La fonction f est dérivable sur $[\sqrt{2}\,; +\infty[$ et
$f'(x) = \dfrac{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{2x^2} \geqslant 0$.
Donc la fonction f est une fonction croissante sur $[\sqrt{2}\,; +\infty[$.
En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a $u_n \geqslant \sqrt{2}$ et f est croissante sur $[\sqrt{2}\,; +\infty[$. Donc on a $f(u_n) \geqslant f(\sqrt{2})$.
Comme $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, on a $u_{n+1} \geqslant \sqrt{2}$.
- **Conclusion :** pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \sqrt{2}$.

3 $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right) - u_n = \dfrac{2 - (u_n)^2}{2u_n}$.

Comme $u_n \geqslant \sqrt{2}$, on a $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.
Donc la suite u est décroissante. Or, elle est minorée, donc elle converge vers une solution de l'équation :

$$f(x) = x \Leftrightarrow x^2 = 2.$$

Donc la suite u converge vers $\sqrt{2}$.

4 **a.** Pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) - \sqrt{2} = \frac{1}{2u_n}(u_n - \sqrt{2})^2.$$

Comme pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \sqrt{2}$

$$u_{n+1} - \sqrt{2} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}(u_n - \sqrt{2})^2 \leqslant \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2})^2.$$

b. Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n - \sqrt{2} \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^n}(u_0 - \sqrt{2})$.

- **Initialisation :**

$$u_1 - \sqrt{2} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}(u_0 - \sqrt{2})^2 \leqslant \frac{1}{4}(u_0 - \sqrt{2}).$$

- **Hérédité :** démontrons que si :

$$u_n - \sqrt{2} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}(u_0 - \sqrt{2}),$$

alors : $$u_{n+1} - \sqrt{2} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}(u_0 - \sqrt{2}).$$

On a $u_{n+1}-\sqrt{2} \leqslant \frac{1}{2}(u_n-\sqrt{2})^2$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :

$$u_{n+1}-\sqrt{2} \leqslant \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}(u_0-\sqrt{2})\right)^2$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}(u_0-\sqrt{2}) \times \frac{(u_0-\sqrt{2})}{2},$$

donc $u_{n+1}-\sqrt{2} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}(u_0-\sqrt{2})$.

Conclusion : pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$u_n-\sqrt{2} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}(u_0-\sqrt{2}).$$

c. Pour que u_n soit une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-9} près, il suffit que :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} \times (2-\sqrt{2}) < 10^{-9} \Leftrightarrow 2^n \ln\left(\frac{1}{2}\right) < \ln\left(\frac{10^{-9}}{2-\sqrt{2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{1}{\ln(2)} \ln\left(\frac{\ln\left(\frac{10^{-9}}{2-\sqrt{2}}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}\right) \Leftrightarrow n \geqslant 5,$$

car n est un entier.

5 a. On généralise la démarche du **4 c.**

b. i. $n = 4$; **ii.** $n = 4$.

c. L'algorithme paraît converger très vite, la valeur initiale de ℓ paraît sans influence sur la vitesse de convergence.

129 **A. 1** • $f(1) = 3$.

• Pour tout réel x de l'intervalle $[1 ; +\infty[$, $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$; donc $f'(1) = -4$.

• T_1 a pour équation $y = -4x + 7$.

• La droite T_1 coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(\frac{7}{4} ; 0\right)$.

2 $f\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{9}{7}$, $f'\left(\frac{7}{4}\right) = -\frac{64}{49}$. La tangente T_2 a pour équation $y = -\frac{64}{49}x + \frac{25}{7}$ et coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $x_2 = \frac{175}{64}$.

3 a. De même la tangente en $A_n(x_n ; f(x_n))$ a pour équation $x_{n+1} = -\frac{4}{(x_n)^2}x + \frac{8-x_n}{x_n}$.

Donc $x_{n+1} = \frac{8x_n-(x_n)^2}{4}$.

b. On a pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $x_{n+1} = g(x_n)$ et $x_1 = \frac{7}{4}$, où g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{8x-x^2}{4}$.

1 Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $x_n \leqslant 4$.

Initialisation : $x_1 = \frac{7}{4} \leqslant 4$.

Hérédité : démontrons que si $x_n \leqslant 4$, alors $x_{n+1} \leqslant 4$.

La fonction g est dérivable sur $[0 ; 4]$ et $g'(x) = \frac{4-x}{2} \geqslant 0$, donc g est une fonction croissante sur $[0 ; 4]$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a $x_n \leqslant 4$ et comme g est croissante sur $[0 ; 4]$ on a $g(x_n) \leqslant g(4)$.

Comme $g(4) = 4$, on a $x_{n+1} \leqslant 4$.

Conclusion : pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $x_n \leqslant 4$.

2 On démontre aussi par récurrence que la suite de terme général x_n est croissante.

3 Donc, comme elle est majorée, la suite (x_n) converge vers une solution de l'équation $g(x) = x$, c'est-à-dire la solution de l'équation $f(x) = 0$, c'est-à-dire 4.

B. 1 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3$, de courbe représentative $\mathscr{C}$.

En toute abscisse a, la tangente à $\mathscr{C}$ admet pour équation : $y = 2ax - a^2 - 3$; elle coupe l'axe des abscisses en $\left(\frac{a^2+3}{2a} ; 0\right)$, c'est-à-dire en $\left(\frac{1}{2}\left(a+\frac{3}{a}\right) ; 0\right)$.

La méthode de Newton appliquée à l'équation $f(x) = 0$ conduit donc à l'étude de la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par $v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(v_n + \frac{3}{v_n}\right)$, avec $v_0 = 3$, par exemple.

2 On démontre par récurrence que la suite v est minorée par $\sqrt{3}$.

3 Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{3-(v_n)^2}{2v_n} \leqslant 0.$$

Donc la suite v est décroissante.

4 Comme la suite v est décroissante et minorée, elle converge vers un réel ℓ solution de $x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right)$, c'est-à-dire vers $\ell = \sqrt{3}$.

5 On calcule :

$v_0 = 3$; $v_1 = 2$; $v_2 = \frac{7}{4}$; $v_3 = \frac{97}{56}$ et $v_4 = \frac{18\,817}{10\,864}$.

Approfondissement

130 **1** On a $P_n = \frac{K(a+1)}{a}x_n$ et $P_{n+1} = \frac{K(a+1)}{a}x_{n+1}$ en transposant dans

$$\frac{P_{n+1}-P_n}{P_n} = a\left(1-\frac{P_n}{K}\right),$$

on obtient :

$x_{n+1} = (1+a)x_n(1-x_n)$, soit en posant $k = 1 + a$:

$$x_{n+1} = kx_n(1-x_n).$$

• Pour tout entier naturel n, $0 \leqslant x_n \leqslant 1$.

Car si $x_n > 1$, alors $x_{n+1} < 0$.

2 a. Les seules limites possibles sont les solutions de l'équation $f(x) = x$ où la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = kx(1-x)$;

$$f(x) = x \Leftrightarrow x(k-1-kx) = 0.$$

Les seules limites possibles de la suite x sont donc 0 et $\frac{k-1}{k}$.

b. Si $k \leqslant 1$, alors $\frac{k-1}{k} \leqslant 0$. La seule limite possible de la suite (x_n) est donc 0.

Pour tout entier naturel n :

$$x_{n+1} - x_n = kx_n\left(\frac{k-1}{k} - x_n\right) \leqslant 0.$$

Donc la suite (x_n) est décroissante. Or, elle est minorée par 0. Elle est donc convergente.

On en déduit que la suite (x_n) converge vers 0.

c. On suppose que $1 < k < 2$.

• Le tableau de variations de la fonction f est :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{k}{4}$	$\searrow$	0

En utilisant que $0 < \frac{k}{4} < \frac{1}{2}$, on montre par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $0 \leqslant x_n \leqslant \frac{1}{2}$, puis en utilisant le sens de variation de f sur $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$, on montre par récurrence que la suite (x_n) est monotone à partir du rang 1.

• On en déduit que la suite (x_n) est convergente.

• Si la suite (x_n) est croissante à partir du rang 1, elle ne peut pas converger vers 0. Donc elle converge vers $\frac{k-1}{k}$.

• Si la suite (x_n) est décroissante à partir du rang 1, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$x_{n+1} - x_n = kx_n\left(\frac{k-1}{k} - x_n\right) \leqslant 0.$$

Donc $\frac{k-1}{k} - x_n \leqslant 0$, soit $x_n \geqslant \frac{k-1}{k}$.

La suite (x_n) ne peut pas converger vers 0. Donc elle converge vers $\frac{k-1}{k}$.

131 **1** On a $S_n = \alpha + \frac{2}{3}\alpha + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\alpha$. C'est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme α.

Donc : $$S_n = \alpha \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} = 3\alpha\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right].$$

2 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 3\alpha$, car la suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ inférieure à 1 en valeur absolue converge vers 0.

Ce procédé limite la profondeur du champ.

Vers le Supérieur

132 Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 2^{n+3}$.

Initialisation : $u_0 \geqslant 2^3$; vrai.

Hérédité : démontrons que si $u_n \geqslant 2^{n+3}$, alors :

$$u_n \geqslant 2^{n+4}.$$

On a $u_{n+1} = 3u_n - 5$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :

$u_{n+1} \geqslant 3 \times 2^{n+3} - 5$, soit $u_{n+1} \geqslant 2 \times 2^{n+3} + 2^{n+3} - 5$.

Comme pour tout entier naturel n, $2^{n+3} - 5$ est positif, on a $u_{n+1} \geqslant 2^{n+4}$.

Conclusion : pour tout entier naturel n,

$$u_n \geqslant 2^{n+3}.$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{n+3} = +\infty$ (suite géométrique de raison 2 strictement supérieure à 1). Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ d'après le théorème de comparaison.

133 **1** Soit ε un réel strictement positif. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, il existe un entier naturel n_0 tel que si $n \geqslant n_0$, alors $\frac{1}{n} \in \left]-\frac{\varepsilon}{2}\,;\frac{\varepsilon}{2}\right[$.

Si $m \geqslant n_0$, alors $\frac{1}{m} \in \left]-\frac{\varepsilon}{2}\,;\frac{\varepsilon}{2}\right[$.

Donc, pour tous entiers n et m supérieurs à n_0, $\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leqslant \varepsilon$, car la distance entre deux points d'un intervalle est inférieure à la longueur de l'intervalle.

Donc la suite u est une suite de Cauchy.

2 **a.** En écrivant que $u_m - u_n = u_m - \ell + \ell - u_n$, on obtient $|u_m - u_n| = |u_m - \ell + \ell - u_n|$, donc en utilisant l'inégalité triangulaire, pour tous entiers m et n :

$$|u_m - u_n| \leqslant |u_m - \ell| + |\ell - u_n|.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. Donc, à partir d'un certain rang n_0, on a pour tout entier $n \geqslant n_0$: $|u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

b. Si n et m sont deux entiers naturels supérieurs à n_0, alors $|u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ et $|u_m - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$; donc, d'après **a.**, $|u_m - u_n| \leqslant \varepsilon$.

La suite u est une suite de Cauchy.

134 **a.** Faux. **b.** Faux. **c.** Faux. **d.** Vrai. **e.** Faux.

135 **1** Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel $k \geqslant 1$, $k! \geqslant 2^{k-1}$.

Initialisation : $1! = 1$ et $2^{1-1} = 1$, donc vrai.

Hérédité : démontrons que si $k! \geqslant 2^{k-1}$, alors :

$$(k+1)! \geqslant 2^k.$$

On a $(k+1)! = (k+1) \times k!$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a $(k+1)! \geqslant (k+1) \times 2^{k-1}$ et, pour tout entier naturel $k \geqslant 1$, $k+1 \geqslant 2$, donc $(k+1)! \geqslant 2^k$.

Conclusion : pour tout entier naturel $k \geqslant 1$, $k! \geqslant 2^{k-1}$.

2 D'après la question précédente,

$$u_n \leqslant 1 + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Par ailleurs :

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}},$$

car c'est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 1.

Donc $u_n \leqslant 3 - \frac{1}{2^{n-1}} \leqslant 3$.

Donc la suite u est majorée par 3.

3 $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} \geqslant 0$. Donc pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.

La suite u est croissante et comme elle est majorée, elle converge vers un réel inférieur à 3.